

**Chirale Störungstheorie
für Quantenchromodynamik auf dem Gitter
mit axial gedrehter Massenmatrix
und drei Quarkflavors
ohne Massenentartung**

χ PT twisted-mass lattice-QCD
with three quarkflavors without mass-degeneracy

Masterarbeit

zur Erlangung des Grades Master of Science
am Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms Universität Münster

vorgelegt von
Sebastian Engelnkemper
geb. am: 29.04.1989 in: Lippstadt

Ausgegeben und betreut von
Prof. Dr. Gernot Münster
Institut für Theoretische Physik

Münster, den 13. September 2014

“We attempt once more, as in the global symmetry scheme, to treat the eight known baryons as a supermultiplet, degenerate in the limit of a certain symmetry but split into isotopic spin multiplets by a symmetry-breaking term. [...] The symmetry is called unitary symmetry and corresponds to the ‘unitary group’ in three dimensions in the same way that charge independence corresponds to the ‘unitary group’ in two dimensions. The eight infinitesimal generators of the group form a Lie algebra, just like the three components of isotopic spin. [...] The baryons then correspond naturally to an eight-dimensional irreducible representation of the group; when the mass difference turned on, the familiar multiplets appear. [...] The pseudoscalar mesons are also assigned to the representation 8. When the symmetry is reduced, they become the multiplets K , \bar{K} , π and χ , where χ is a neutral isotopic singlet meson the existence of which we predict.”

- Murray Gell-Mann, „*The Eightfold Way*“, 15. März 1961.

Diese Fassung der Arbeit unterscheidet sich nur geringfügig von der am 13. September 2014 dem Prüfungsamt vorgelegten Version.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der Quantenchromodynamik	4
2.1	Einordnung in das Standardmodell und Phänomenologie	4
2.1.1	Confinement und Asymptotische Freiheit	4
2.2	Die QCD-Lagrangedichte	7
2.3	Zufällige Symmetrien von \mathcal{L}_{QCD}	8
2.3.1	Chirale Symmetrie	8
2.3.2	Das Noether-Theorem	9
3	Die chirale Störungstheorie	12
3.1	Spontane Symmetriebrechung und Goldstone-Theorem	12
3.1.1	Brechung einer globalen nicht-abelschen $SO(3)$ -Symmetrie	13
3.1.2	Goldstone-Theorem	15
3.1.3	Explizite Symmetriebrechung	15
3.2	Das (pseudo-)skalare Quarkcondensat	17
3.3	Parametrisierung und Transformationsverhalten der Goldstone-Bosonen	18
3.4	Effektive Feldtheorie	19
3.4.1	Effektive Wechselwirkung skalarer Felder	19
3.4.2	Das Weinberg'sche Zählchema	21
3.5	Konstruktion der effektiven Lagrangedichte für Mesonen	22
3.5.1	Die führende Ordnung	24
3.5.2	Die Kopplungskonstanten in führender Ordnung	26
3.5.3	Die nächstführende Ordnung	27
4	Quantenchromodynamik auf dem Gitter	29
4.1	Der Gitterformalismus	29
4.2	Die Fermionen-Wirkung auf dem Gitter	30
4.3	Die Wilson-Wirkung	31
4.4	Die Symanzik-Wirkung in $\mathcal{O}(a)$	33
4.5	Gitter-QCD mit Twisted-Mass	34
4.6	Chirale Störungstheorie auf dem Gitter mit Twisted-Mass	35
5	Berechnung physikalischer Größen im Rahmen der Twisted-Mass χPT	38
5.1	Mesonmassen führender Ordnung	38
5.1.1	Verschiebung des Minimums und störungstheoretischer Ansatz	38
5.1.2	Krümmung der Lagrangedichte und Berechnung der Massen	40
5.1.3	Optimierte Feld-Parametrisierung	43
5.2	Mesonmassen in nächstführender Ordnung	44
5.2.1	Verschiebung des Minimums und Renormierungskonstanten	45
5.2.2	Krümmung der Lagrangedichte und Treelevel-Massen	49
5.2.3	Schleifenrechnung und dimensionale Regularisierung	58
5.2.4	Diagonalisierung des Propagators und One-Loop-Massen	68
6	Zusammenfassung und Ausblick	76

A		
	Konventionen	I
B		
	Chirale Darstellung der γ-Matrizen	II
	B.1 Im Minkowski-Raum	II
	B.2 Mit Euklidischer Metrik	III
C		
	Spezielle Unitäre Gruppe SU(3)	IV
	C.1 Tensoralgebra	V
	C.2 Produkte und Spurrelationen	V
D		
	Spezielle Orthogonale Gruppe SO(3)	VI
E		
	Das Pfadintegral für Grassmann-wertige Felder	VII
	E.1 Die Fermionen-Determinante	VIII
F		
	Wilson-Mittelung und Full-Twist $\mathcal{O}(a)$-Verbesserung	IX
G		
	Die Gamma-Funktion	X
H		
	Renormierung der NLO-Entwicklungskoeffizienten	XI
	Rechnungen	XII
	Literatur	XXXIX

1. Einleitung

Die Entwicklung der Quantentheorie auf der einen und der Relativitätstheorie auf der anderen Seite bildete zu Beginn des 20. Jahrhunderts eine wichtige und bis heute merkliche Zäsur in der Geschichte der Physik.

Die zuvor als universell angesehenen Auffassungen der klassischen Mechanik und Elektrodynamik wurden durch die neuen Sichtweisen zu Grenzfällen einer größeren, aber dennoch unsichtbaren Wahrheit erklärt.

Die Allgemeine Relativitätstheorie, die von Albert Einstein bereits im Jahr 1913 entworfen und im März 1916 ausformuliert wurde, beschäftigt sich mit einer der vier heute bekannten fundamentalen Wechselwirkungen der Physik, der *Gravitation*. Da die relative Stärke dieser Kraft etwa 26 bis 41 Größenordnungen geringer als die der übrigen Wechselwirkungen ist, beschränkt sich die Relevanz der ART auf sehr große Massenskalen. Die des Weiteren unendliche Reichweite der Gravitation macht diese Theorie bis heute zum wichtigsten mathematischen Instrument der Kosmologie.

Neben der makroskopischen Beschreibung der Relativitätstheorie liefert die weitestgehend parallel entwickelte Quantentheorie eine Erklärung mikroskopischer Prozesse und Sachverhalte. Die anfangs umstrittene quantenmechanische Beschreibung gebundener Zustände und Energieniveaus in Atomen, die maßgeblich durch Max Planck zur Jahrhundertwende begründet und in den 1920er und -30er Jahren durch Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Paul Dirac, Niels Bohr und weiteren Größen erarbeitet wurde, legte den Grundstein für die moderne Teilchenphysik, die die übrigen fundamentalen Wechselwirkungen - die *elektromagnetische*, die *schwache* und die *starke Wechselwirkung* - erklärt.

Der mathematische Ansatz, der sich im Wesentlichen in der Lösung der Schrödinger-Gleichung manifestiert, erlaubt es zwar, Zustände mit einer geringen Anzahl von Teilchen präzise zu bestimmen, scheitert allerdings bei der Beschreibung komplizierter Streuprozesse in Mehrteilchensystemen.

Die Lösung dieser Problematik wurde in führender Rolle von Richard Feynman in den 1940er Jahren erbracht, der zusammen mit den Physikern Julian Schwinger und Shin'ichirō Tomonaga eine quantenfeldtheoretische Beschreibung der Elektrodynamik einführte und damit die *Quantenelektrodynamik* begründete. Die QED liefert auf Grundlage des Eichprinzips eine plausible und mit hoher Präzision vermessene Beschreibung elektrisch geladener Teilchen im Rahmen der *elektromagnetischen Wechselwirkung*. Das Grundprinzip der damit etablierten Quantenfeldtheorien liegt in der zur klassischen Feldtheorie analogen Ersetzung von Punktteilchen durch Teilchenfelder, die durch das Postulat der „zweiten Quantisierung“ nichtverschwindenden Vertauschungsrelationen unterliegen. Diese Annahme stellt eine Erweiterung der auf die Observablen eines Systems bezogenen „ersten Quantisierung“ im Rahmen der Quantenmechanik dar, die sich am Beispiel von Ort und Impuls in der *Heisenberg'schen Unschärferelation* äußert.

In den 1960er Jahren folgte die Einbindung der *schwachen* und der *starken Wechselwirkung* in das nun entstehende *Standardmodell der Teilchenphysik*. Die Physiker Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg vereinheitlichten 1967 in der nach Ihnen benannten GWS-Theorie elektromagnetische und schwache Wechselwirkung zur *elektroschwachen Wechselwirkung* während Murray Gell-Mann die *Quantenchromodynamik* auf Annahme einer Farbladung der involvierten Quarks begründete. Parallel zu dieser Entwicklung führte Peter Higgs den *Higgs-Mechanismus* und damit das Higgs-Boson ein, aufgrund dessen sich die massiven Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung durch eine spontane Symmetriebrechung der elektroschwachen Eichsymmetrie erklären lassen; später wurde dieser Mechanismus auf die Erzeugung aller Teilchenmassen durch *Yukawa-Kopplungen* mit dem Higgs-Feld verallgemeinert.

Das so bis heute im Wesentlichen gültige Standardmodell der Teilchen, das drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen der Physik durch eine zugrunde liegende $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichsymmetrie umfasst, weist allerdings im Zuge der aktuellen

Forschung eine immer größere Anzahl von Diskrepanzen auf, die weitere Vereinheitlichungen der Symmetriegruppen, Supersymmetrische Theorien und die Stringtheorie als Lösungsansätze fordern. Zu den wichtigsten Problemstellungen des Standardmodells gehören zum Beispiel die Integration der Gravitation sowie die Erklärung kosmologisch nachgewiesener Phänomene wie der *Dunklen Materie* und *Energie*, die offenbar einen beträchtlichen Teil des Universums darstellen. Des Weiteren unterliegt das Modell einem *Hierarchie-Problem* im Bezug auf die verschiedenen Größenordnungen der involvierten Parameter und einer unerklärten Unterdrückung der mathematisch auftretenden *CP*-Verletzung durch die starke Wechselwirkung.

Da die aktuell beobachtbaren Teilchen und Wechselwirkungsprozesse allerdings vollständig durch das Standardmodell beschrieben werden und mit der kürzlichen Entdeckung des Higgs-Bosons am LHC das letzte durch das SM postulierte Teilchen nachgewiesen ist, wird das mittlerweile als „konservativ“ zu bezeichnende Standardmodell im Rahmen der aktuellen Forschung weiterhin untersucht und angewandt.

Besonders die Quantenchromodynamik weist aufgrund ihrer nicht-abelschen Eichgruppe $SU(3)_C$ und der daraus resultierenden starken Energieabhängigkeit der Kopplungskonstanten einige mathematische und physikalische Eigenheiten auf, die im einführenden Theorie-teil dieser Arbeit näher erläutert werden. Eine Problematik stellt die Größenordnung der starken Kopplung dar, die für Energien unterhalb von 1 GeV etwa einen Wert der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ annimmt. Diese Tatsache macht gewöhnliche störungstheoretische Ansätze, wie sie im elektroschwachen Sektor Anwendung finden, unmöglich. Die Herangehensweise an diesen Sachverhalt ist im Wesentlichen zweigeteilt:

Zum einen wird die gängige perturbative Methodik durch *Monte-Carlo-Simulationen* auf einem *Raum-Zeit-Gitter* ersetzt beziehungsweise erweitert, sodass freie Parameter durch numerische Rechnungen bestimmt werden können. Die Quantisierung der Raum-Zeit selbst führt allerdings zu systematischen Abweichungen der Messergebnisse in Abhängigkeit der endlichen Gitterkonstanten und weitergehend zu beliebig komplizierten Gitterartefakten, die die zugrunde liegende Theorie nichttrivial beeinflussen. Neben der Verbesserung der Monte-Carlo-Algorithmen und der Vergrößerung von Rechenkapazitäten steigt die Zahl und das Interesse an Möglichkeiten, Gitterartefakte durch alternative Theorien analytisch zu minimieren. Ein Beispiel bildet hier die *Twisted-Mass Lattice-QCD*.

Zum anderen kann die Theorie grundlegend auf analytischem Wege modifiziert werden, sodass eine störungstheoretische Behandlung zum Beispiel durch effektive Feldtheorien innerhalb der relevanten Energieskalen möglich wird. Die *chirale Störungstheorie* (kurz: χ PT) stellt einen der wichtigsten Ansätze diesbezüglich dar und soll den wesentlichen Kern dieser Arbeit bilden.

Die grundlegende Motivation der χ PT besteht darin, die Erzeugung der Hadronenmassen basierend auf den um Größenordnungen kleineren Quarkmassen zu erklären. Die Tatsache, dass das Proton eine etwa 100-fach größere Ruhemasse besitzt als die Summe der Ruhemassen seiner drei Valenzquarks, deutet darauf hin, dass der zugrunde liegende Mechanismus der Massenerzeugung komplexer Natur ist. Betrachtet man zum Beispiel die Bindung der Nukleonen im Atomkern beläuft sich der Massendefekt aufgrund der Bindungsenergie auf etwa 1 % und nicht auf ein Vielfaches der beteiligten Teilchenmassen, wie es innerhalb eines einzelnen Nukleons der Fall ist.

Des Weiteren legen die verhältnismäßig kleinen Quarkmassen der drei leichtesten Flavors *up*, *down* und *strange* im Hinblick auf die QCD Skala $\Lambda_{\text{QCD}} = 1 \text{ GeV}$ eine störungstheoretische Behandlung dieser Massen nahe. Schlussendlich gibt das Teilchenspektrum der gebundenen Quark-Antiquark-Zustände beziehungsweise *Mesonen* einen Hinweis auf eine komplexe Form der spontanen Symmetriebrechung, die ebenfalls im Rahmen der χ PT erklärt wird.

Im Allgemeinen schließen sich die angesprochenen numerischen und analytischen Methoden der QCD nicht aus. Vielmehr liefert die χ PT beispielsweise Entwicklungsparameter,

die durch Monte-Carlo-Simulationen bestimmt werden können, sodass sich insgesamt Vorhersagekraft und Verständnis der zugrunde liegenden Quantenchromodynamik verbessern. Des Weiteren liefert die Möglichkeit der freien Wahl physikalischer Simulationsparameter wie zum Beispiel der Quarkmassen einen entscheidenden Vorteil gegenüber Beschleuniger-Experimenten. Insgesamt erweist sich also die Kombination der beiden erwähnten Herangehensweisen als ein sehr effizientes und zukunftssträchtiges Arbeitsfeld.

Im Laufe dieser Arbeit wird zunächst die QCD als nicht-abelsche Eichtheorie eingeführt und beleuchtet. Darauf aufbauend soll das grundsätzliche Verständnis der chiralen Störungstheorie unter gruppentheoretischen Aspekten hergeleitet werden, sodass sich der mathematische und physikalische Mechanismus zur Entstehung der Mesonen vollständig erklären lässt. Anschließend wird eine effektive Lagrangedichte für das Mesonen-Oktett der drei leichten Quarkflavors entwickelt, um eine mathematische Grundlage zur Beschreibung der Physik dieser neuen Zustände aufzubauen.

Weitergehend wird der Gitterformalismus für die Quantenchromodynamik eingeführt und die Effekte der Raum-Zeit-Quantisierung auf die chirale Symmetrie untersucht. Darüber hinaus wird die axiale Drehung der Massenmatrix (kurz: *Twisted-Mass*) als analytische Methode zur Verbesserung des Simulationsverhaltens der Theorie erklärt und implementiert. Unter Berücksichtigung der Terme führender beziehungsweise nächstführender Ordnung der effektiven Lagrangedichte werden so die Massen der Mesonen störungstheoretisch berechnet und anschließend im Bezug auf Gitterartefakte und deren Kompensation durch den Twisted-Mass-Formalismus untersucht.

Besonderes Augenmerk dieser Arbeit soll zum einen auf dem systematischen Aufbau der grundlegenden Theorie und zum anderen auf einer mathematisch und physikalisch nachvollziehbaren Anwendung liegen. Umfangreiche Rechnungen, die für das Grundverständnis zur analytischen Behandlung der Lagrangedichte unerlässlich sind, werden daher explizit im Kapitel „Rechnungen“ angegeben.

2. Grundlagen der Quantenchromodynamik

2.1. Einordnung in das Standardmodell und Phänomenologie

Das Standardmodell der Teilchenphysik umfasst insgesamt zwölf *Fermionen*, die nach heutigem Verständnis die sichtbare Materie des Universums bilden. Darüber hinaus existieren zwölf *Eichbosonen* zur Vermittlung der drei in der Elementarteilchenphysik relevanten Wechselwirkungen und ein Higgs-Boson, dessen Feld durch den Higgs-Mechanismus und Yukawa-Kopplungen eng an die Erzeugung der Teilchenmassen geknüpft ist.

Die Fermionen lassen sich in Dubletts bzgl. des schwachen $SU(2)_L$ -Isospins I_3 darstellen und in sechs *Leptonen*

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L$$

und sechs *Quarks*¹

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$$

gruppieren. Die schwache Wechselwirkung koppelt an I_3 und damit an alle bekannten Fermionen.

Diese durch die drei massiven schwachen Eichbosonen W^+ , W^- und Z^0 vermittelte Kopplung bezieht sich im Gegensatz zu anderen Wechselwirkungen nur auf linkshändige Teilchen, wie durch den Index L angedeutet, sodass sich die rechtshändigen Teilchen in dieser Darstellung wie Singulets verhalten. Des Weiteren wird ersichtlich, dass sich die Dubletts in jeweils drei Familien bzw. sechs *Flavors* einteilen lassen, die sich hauptsächlich durch ihre relativ großen Massendifferenzen unterscheiden.

Außer den drei *Neutrinos* besitzen alle Leptonen eine elektrische Ladung q , aufgrund derer sie in der GWS-Theorie über die $U(1)_Y$ -Symmetrie nach elektroschwacher Symmetriebrechung mittels des masselosen Photons γ wechselwirken.

Die insgesamt sechs Quarks, die in Tab. 2.1 vollständig spezifiziert werden, verfügen über eine zusätzliche *Farb-Ladung*, an die die acht *Gluonen* g_i als Eichbosonen der starken Wechselwirkung koppeln. Diese „Farbe“ kann die Werte *rot*, *blau* und *grün* (bzw. *antirrot*, *antiblau* und *antigrün*) annehmen, sodass sich jedes Quark wie ein Triplet bzgl. der zugrunde liegenden $SU(3)_C$ -*Color-Symmetrie* verhält. Die Tatsache, dass es sich dabei um eine nicht-abelsche Symmetriegruppe handelt, führt zusammen mit der jeweiligen Farb-Antifarbladung der Gluonen zu einigen spezifischen Eigenschaften der starken Wechselwirkung, die im folgenden Kapitel kurz beleuchtet werden.

Flavor	up	down	strange	charm	bottom	top
El. Ladung [e]	+2/3	-1/3	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3
Masse [MeV]	1,7-3,3	4,1-5,8	101 ⁺²⁹ ₋₂₁	1270 ⁺⁷⁰ ₋₉₀	4190 ⁺¹⁸⁰ ₋₆₀	172000 ⁺⁹⁰⁰ ₋₁₃₀₀

Tabelle 2.1: Massen und Ladungen der sechs Quarks in den Masseneigenzuständen [1]

2.1.1. Confinement und Asymptotische Freiheit

Die Gluonen nehmen eine im Vergleich zu den Austauscheteilchen anderer Wechselwirkungen spezielle Rolle ein. Wie die schwachen Eichbosonen erklären sie sich auf Grundlage einer nicht-abelschen Eichsymmetrie und tragen damit selbst die Ladung, an die sie koppeln.

¹ Die gestrichene Notation der zweiten Dublett-Komponenten bezieht sich auf die Mischung der Masseneigenzustände zu den schwachen Isopin-Dubletts über die *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix*

Aufgrund der starken Kopplung sind die dadurch auftretenden Selbstwechselwirkungen des Gluon-Feldes (vgl. Abb. 2.1) allerdings wesentlich ausgeprägter.

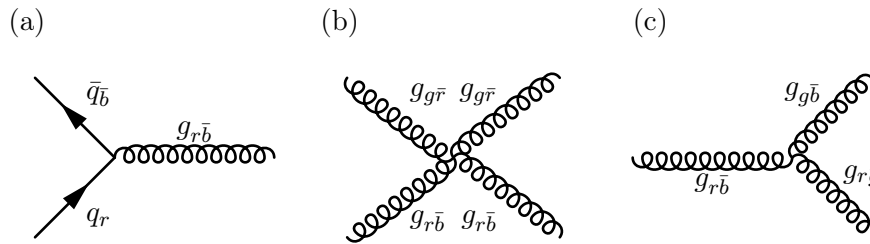


Abbildung 2.1: Die drei fundamentalen Vertices der QCD zwischen:
 (a) einem roten Quark und einem antiblauen Antiquark sowie einem rot-antiblauen Gluon
 (b) zwei grün-antiroten und zwei rot-antiblauen Gluonen
 (c) einem rot-antiblauen, einem grün-antiblauen und einem rot-antigrünen Gluon

In der Quantenelektrodynamik bleiben diese Wechselwirkungen aus. In Anwesenheit einer elektrischen Ladung wird das QED-Vakuum durch die spontane Erzeugung virtueller Teilchen-Antiteilchen Paare polarisiert und schirmt damit das Kraftfeld ab. Dieser Effekt wird als *Screening* bezeichnet und erklärt ein asymptotisches Verschwinden des Wechselwirkungskraftfeldes für größere Entfernungen. Die durch die QCD möglichen Schleifen-Korrekturen der Eichbosonen sind im Vergleich vielfältiger (vgl. Abb. 2.1): Neben der Ausbildung von Quark- Antiquark-Paaren können bspw. virtuelle Gluonen-Paare entstehen, die das Feld nicht abschwächen, sondern verstärken und dabei seine „Netto-Farbladung“ ändern. Unter Annahme von maximal 16 Quarkflavors überwiegt dieser Effekt, sodass sich insgesamt eine als *Anti-Screening* bezeichnete Verstärkung der Wechselwirkung ergibt [2].

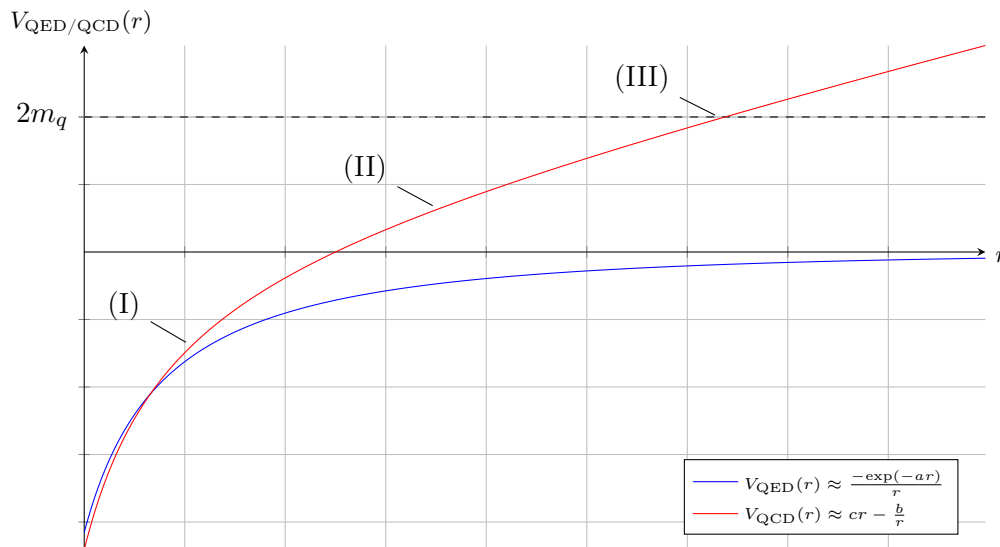


Abbildung 2.2: Skizzierter Verlauf der Wechselwirkungspotentiale der QED und QCD

Wie in Abb. 2.2 zu erkennen ist, weist das Potential der QCD-Wechselwirkung auf längere Distanzen ein im Vergleich zur QED ungewöhnliches Verhalten auf. Anstatt gegen den Wert 0 zu konvergieren, geht es in ein divergentes lineares Verhalten über.

Versucht man im Rahmen der QED zwei Teilchen entgegengesetzter Ladung zu trennen, nimmt die Stärke der Wechselwirkung mit größerer Distanz ab und die Teilchen gehen in einen separierten Zustand über. In der Quantenchromodynamik setzt hier das Phänomen des *Confinements* ein: Bei einem Versuch, zwei Quarks mit entgegengesetzter Farbladung (z.B. Blau-Antiblau) voneinander zu trennen, wird eine immer größere Energie benötigt, um die effektive Distanz der Teilchen zu erhöhen, sodass sich folgender schematischer Ablauf zeigt (vgl. Abb. 2.2 und 2.3):

- (I) In kleinem Abstand, d.h. im gebundenen Grundzustand, zeigt sich ein zur QED analoges Verhalten: Die Quarks bilden einen kondensierten $\bar{q}q$ -Zustand, z.B. ein Pion.
- (II) Durch Energiezufuhr geht das Kondensat in einen angeregten Zustand über. Der effektive Abstand der beiden Konstituenten vergrößert sich.
- (III) Das nun positive Potential erreicht einen Energiewert, der der Summe zweier Quarkmassen entspricht, sodass sich spontan ein neues Quark-Antiquark-Paar bildet.
- (IV) Das so entstandene Quark-Antiquark-Paar kondensiert mit dem ursprünglichen Paar zu zwei separierten $\bar{q}q$ -Zuständen(-Kondensaten). Der Endzustand besteht also nicht aus zwei unabhängigen Quarks, sondern aus zwei $\bar{q}q$ -Paaren bzw. Pionen.

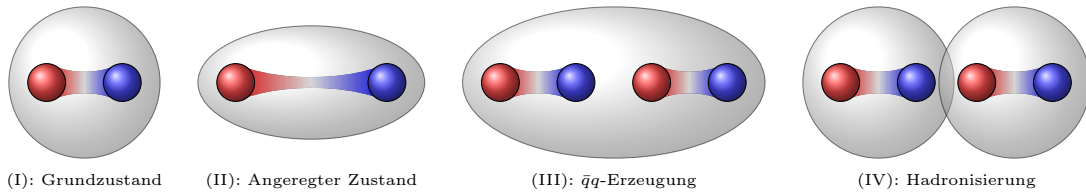


Abbildung 2.3: Schematisches Verhalten eines $\bar{q}q$ -Kondensates bei Energieerhöhung mit Confinement

Dieses Prinzip lässt sich analog auf das „Spalten“ von Baryonen, also qqq -Zuständen, übertragen. Zusammengefasst verhindert das Confinement für typische Energieskalen die Existenz freier Farbladungen, sodass nur farbneutrale Zustände (*Farbe-Antifarbe* oder *Rot-Blau-Grün*) stabil sind. Ein weiteres QCD-spezifisches Phänomen, das für höhere Energien zum Tragen kommt, ist die *asymptotische Freiheit*.

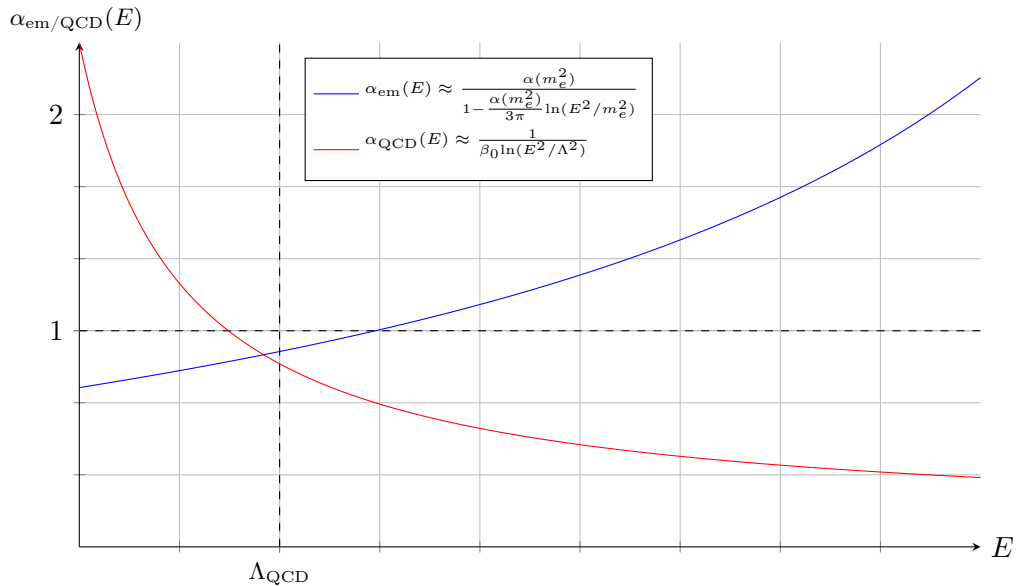


Abbildung 2.4: Energieabhängigkeit der Kopplungskonstanten von QED und QCD (α_{em} wurde aus Gründen der Anschaulichkeit hochskaliert)

Diese spiegelt nicht die Ortsabhängigkeit der Kopplung, sondern die Energieabhängigkeit der Kopplungskonstanten wider. Für hochenergetische Prozesse, z.B. bei Kollisionen schwerer Nukleonen, nimmt die Kopplungskonstante nicht zu, so wie es in der QED beobachtet wird, sondern sie konvergiert gegen 0 (s. Abb. 2.4). Das heißt, dass sich bei Prozessen hoher Energie eine gänzlich andere Physik zeigt, als im niederenergetischen Regime. Dies äußert sich z.B. darin, dass für große Energieskalen ein *Quark-Gluon-Plasma* erzeugt werden kann,

in dem das Confinement aufgehoben ist. Für Energien der Größenordnung Λ_{QCD} , die etwa der Protonmasse entspricht, nimmt die Kopplung allerdings Werte $\mathcal{O}(1)$ an, wodurch perturbative Ansätze bzgl. der Kopplung im Gegensatz zur QED² unmöglich werden.

2.2. Die QCD-Lagrangedichte

Die Lagrangedichte für freie Quarks mit N_f Flavors und N_C Farben ist in den natürlichen Einheiten (s. App. A) über den Dirac-Operator und die γ -Matrizen³ (s. App. B) durch

$$\mathcal{L}_{\text{QCD,free}} = \sum_{a=1}^{N_C} \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{\alpha,\beta=1}^4 \bar{q}_{a,\alpha,f} \left(\gamma_{\alpha\beta}^\mu i\partial_\mu - m_f \delta_{\alpha\beta} \right) q_{a,\beta,f}. \quad (2.1)$$

gegeben⁴ [1,3]. Unter Anwendung des Eichprinzips bzgl. einer lokalen $SU(3)_C$ Symmetrie für $N_C = 3$ werden die acht Eichfelder, die die Gluonen repräsentieren, durch Einführung einer kovarianten Ableitung und eines entsprechenden Yang-Mills-Terms in die Lagrangedichte implementiert - die Summation über die Dirac- und Color-Indices sei von nun an implizit:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f (\gamma^\mu iD_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{a,\mu\nu} G_a^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

mit $D_\mu q_f := \left(\partial_\mu + ig_s A_{a,\mu} \frac{\lambda_a}{2} \right) q_f \quad (2.2a)$

und $G_{a,\mu\nu} := \partial_\mu A_{a,\nu} - \partial_\nu A_{a,\mu} - g_s f_{abc} A_{b,\mu} A_{c,\nu}. \quad (2.2b)$

Dabei sind f_{abc} und λ_a die Strukturkonstante und Generatoren der $SU(3)$ nach Gell-Mann (s. App. C). Eine Transformation der Form

$$q_f \rightarrow U q_f \quad (2.3a)$$

$$\bar{q}_f \rightarrow \bar{q}_f U^\dagger \quad (2.3b)$$

$$A_{a,\mu} \frac{\lambda_a}{2} := A_\mu \rightarrow U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g_s} \partial_\mu U U^\dagger \quad (2.3c)$$

bzgl. der üblichen Parametrisierung

$$U := \exp \left[-ig_s A_{a,\mu} \frac{\lambda_a}{2} \right] \quad (2.4)$$

der zugrunde liegenden Symmetriegruppe lässt die nun vollständig konstruierte QCD-Lagrangedichte invariant [1]. Der nichtabelsche Yang-Mills-Term liefert schlussendlich die Selbstwechselwirkungsverices der Gluonen (s. Gl. (2.2b) u. Abb. 2.1). Bzgl. der reinen Eichsymmetrie ist weitergehend ein Term der Form [4]

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{g_s^2 \theta}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_a^{\mu\nu} G_a^{\rho\sigma} \quad (2.5)$$

in der Lagrangedichte denkbar, der allerdings explizit die P - und CP -Symmetrien der Theorie bricht. Da der Parameter θ bislang durch experimentelle Befunde als sehr klein ($\theta \ll \mathcal{O}(10^{-9})$) bestimmt wurde [4], wird dieser im Folgenden gleich Null gesetzt.

² Die Kopplungskonstanten der QED und schwachen Wechselwirkung nehmen im relevanten Energiebereich Werte $\alpha_{\text{em}} \approx \mathcal{O}(10^{-2})$ bzw. $G_F \approx \mathcal{O}(10^{-5})$ an

³ Die Form der Lagrangedichte ist unabhängig von der zugrunde liegenden Darstellung

⁴ Des Weiteren sei hier und im Folgenden, falls nicht anders angegeben, von der expliziten Angabe der raum-zeitlichen Abhängigkeiten der Felder und Operatoren abgesehen

2.3. Zufällige Symmetrien von \mathcal{L}_{QCD}

Die in Kap. 2.2 eingeführte Lagrangedichte weist neben der beschriebenen internen lokalen $SU(3)_C$ -Eichsymmetrie eine Symmetrie bzgl. der Poincaré-Gruppe auf, die sich in der Lorentz-Invarianz der enthaltenen Größen äußert. Das *CPT-Theorem* verknüpft diese beiden Symmetrien mit der Invarianz von \mathcal{L}_{QCD} unter gleichzeitiger C -, P - und T -Transformation und weitergehend mit der Äquivalenz der Transformationen bzgl. des CP - und T -Operators [5]. Im Gegensatz zur schwachen Wechselwirkung ergibt sich für die QCD unter der empirisch vertretbaren Vernachlässigung von Termen der Art (2.5) also eine getrennte C -, P - und T -Symmetrie der Theorie.

Eine weitere „zufällige“ interne *chirale Symmetrie* der Lagrangedichte tritt für den Grenzfall verschwindender Quarkmassen auf und wird im Folgenden näher betrachtet.

2.3.1. Chirale Symmetrie

Mit Hilfe der chiralen Projektionsoperatoren

$$P_L := \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \quad \text{und} \quad P_R := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5), \quad (2.6)$$

die den üblichen Projektor-Eigenschaften⁵ unterliegen, lassen sich die Quark-Felder gemäß

$$q_f = (P_L + P_R)q_f = q_{f,L} + q_{f,R}, \quad (2.7)$$

in links- und rechtshändige Anteile zerlegen, die aufgrund der Antikommutations-Relationen der γ -Matrizen keine Eigenzustände des C - und P -Operators darstellen [6].

Die Lagrangedichte in Gl. (2.1) nimmt nach chiraler Zerlegung der Quarkfelder nach Gl. (2.7) folgende Gestalt an⁶:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=1}^{N_f} [\bar{q}_{f,L} i \not{D} q_{f,L} + \bar{q}_{f,R} i \not{D} q_{f,R}] - \sum_{f=1}^{N_f} [\bar{q}_{f,L} m_f q_{f,R} + \bar{q}_{f,R} m_f q_{f,L}] - \frac{1}{4} G_{a,\mu\nu} G_a^{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Die Massenterme des Dirac-Operators mischen augenscheinlich die links- und rechtshändigen Anteile der Quarkfelder.

Betrachtet man die empirischen Massen der Quarks (vgl. Tabelle 2.1), wird deutlich, dass sich diese anhand der Skala $\Lambda_{\text{QCD}} = 1 \text{ GeV}$, die sich an der Protonmasse ($m_p \approx 938, 27 \text{ MeV}$) orientiert [7], in drei „leichte“ und drei „schwere“ Quarks gruppieren lassen:

$$m_u, m_d, m_s \ll \Lambda_{\text{QCD}} < m_c, m_b, m_t. \quad (2.9)$$

In Relation zur betreffenden Skala bietet der chirale Grenzfall⁷ verschwindender Quarkmassen über die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=1}^3 [\bar{q}_{f,L} i \not{D} q_{f,L} + \bar{q}_{f,R} i \not{D} q_{f,R}] - \frac{1}{4} G_{a,\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

für die drei leichten Quarks *up*, *down* und *strange* also eine erste Näherung.

Des Weiteren liegt es nahe, im Hinblick auf die offensichtlich komplexe Erzeugung der Hadronenmassen (z.B. $m_p \gg 2m_u + m_d$) einen perturbativen Ansatz bzgl. der Quarkmassen aufzubauen, der schlussendlich die chirale Störungstheorie (kurz: χPT) begründet.

⁵ Die Vollständigkeits- und Orthogonalitäts-Relationen sowie die Idempotenz folgen unmittelbar aus den Eigenschaften der γ_5 -Matrix (vgl. App. B)

⁶ Unter Verwendung der Feynman-Notation für Operatoren O : $\gamma^\mu O_\mu := \not{O}$

⁷ Man spricht für masselose Teilchen von *Helizität*, die nunmehr eine diskrete Größe darstellt

Der chirale Grenzfall der QCD in Gleichung (2.10) ist nunmehr invariant unter einer globalen chiralen $U(3)_L \times U(3)_R$ -Transformation der links- und rechtshändigen Quarkflavor-Triplets, die sich durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} &:= q_L \rightarrow U_L q_L := \exp \left[-i \sum_{a=1}^8 \Theta_{L,a} \frac{\lambda_a}{2} \right] \exp[-i\Theta_L] q_L \\ \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} &:= q_R \rightarrow U_R q_R := \exp \left[-i \sum_{a=1}^8 \Theta_{R,a} \frac{\lambda_a}{2} \right] \exp[-i\Theta_R] q_R \end{aligned} \quad (2.11)$$

in eine $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$ -Symmetrie zerlegen lässt.

2.3.2. Das Noether-Theorem

Ausgehend von der Kernaussage des Noether-Theorems, führen diese Symmetrie-Transformationen zu insgesamt $2(8+1) = 18$ erhaltenen Noether-Strömen bzw. -Ladungen [8,9]. Nach der allgemeinen Formel

$$J_i^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Theta_i} \quad i = 1, \dots, 18 \quad (2.12)$$

für infinitesimale Transformationen bzgl. Gl. (2.11) der Form

$$q_{R/L} \rightarrow U_{R/L} q_{R/L} \approx (\mathbb{1} + \delta U_{R/L}) q_{R/L}, \quad (2.13a)$$

$$\text{sodass} \quad \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 \rightarrow \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\prime 0} \approx \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \delta \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0, \quad (2.13b)$$

ergeben sich die insgesamt 18 erhaltenen Ströme zu:

$$L_a^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0}{\partial \partial_\mu \Theta_{L,a}} = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, \quad R_a^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0}{\partial \partial_\mu \Theta_{R,a}} = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R, \quad (2.14)$$

$$L^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0}{\partial \partial_\mu \Theta_L} = \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, \quad R^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0}{\partial \partial_\mu \Theta_R} = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R. \quad (2.15)$$

Die betreffenden Divergenzen

$$\partial_\mu J_i^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \Theta_i} = 0 \quad i = 1, \dots, 18. \quad (2.16)$$

ergeben sich jeweils zu Null. Um die so gewonnenen Ströme in axiale und vektorielle Größen umzuschreiben, werden die Linear-Kombinationen

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, \quad A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q, \quad (2.17)$$

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q, \quad A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q \quad (2.18)$$

eingeführt, sodass die neun vektoriellen Ströme positives, und die neun axialen⁸ Ströme negatives Paritätsverhalten aufweisen. Die zugrunde liegende Symmetrie-Gruppe kann nun durch $SU(3)_A \times SU(3)_V \times U(1)_A \times U(1)_V$ angegeben werden und wird im Folgenden bzgl. ihrer Untergruppen analysiert.

⁸ Die Größen A_a^μ sind nicht mit den Gluonen-Feldern $A_{a,\mu}$ in Kap. 2.2 zu verwechseln

Die $U(1)_V$ -Symmetrie und die damit verbundene Erhaltungsgröße

$$Q_V = \int d^3x V^0 = \int d^3x q^\dagger q \quad := \quad B = \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{3} \quad (2.19)$$

spiegelt die Baryonenzahl-Erhaltung⁹ wider und wird weitergehend als implizit angenommen und nicht nähergehend besprochen.

Betrachtet man die Divergenz der $U(1)_A$ -Symmetrie, zeigt sich ein Verhalten, das als *axiale* bzw. *chirale Anomalie* bezeichnet wird. Aufgrund von Quanteneffekten ergibt sich ein nichtverschwindender endlicher Wert

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{3g_s^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_a^{\mu\nu} G_a^{\rho\sigma} \quad (2.20)$$

bzgl. des korrespondierenden Noether-Stroms für $N_f = 3$ Quarkflavors [1]. Diese, auch *Adler-Bell-Jackiw-Anomalie* genannte explizite Brechung der $U(1)_A$ -Symmetrie, hat einige wichtige physikalische Folgen:

Zum einen beschreibt sie den natürlich vorkommenden Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, dessen empirische Zerfallsrate im Hinblick auf die relativ kleine Pionmasse als zu groß erscheinen würde [10]. Zum anderen erklärt sie die vergleichsweise große Masse des η' -Mesons, das oft als neuntes Meson bzw. Singulett-Zustand zum Mesonen-Oktett gesehen wird (s. [11,12] u. Kap. 3.1.3).

Die weitere Entwicklung der chiralen Störungstheorie beschränkt sich auf die jeweils acht in Gl. (2.17) gegebenen vektoriellen und axialen Ströme V_a^μ und A_a^μ , die mit einer $SU(3)_A \times SU(3)_V$ -Symmetrie korrespondieren. Erweitert man die Lagrangedichte der Theorie wieder durch Massenterme der Form

$$\mathcal{L}_M = -\bar{q} M q, \quad (2.21a)$$

$$\text{mit} \quad M := \text{diag}(m_u, m_d, m_s), \quad (2.21b)$$

$$\text{sodass} \quad \mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \mathcal{L}_M, \quad (2.21c)$$

nehmen die Divergenzen der betreffenden Ströme von Null verschiedene Werte an [1]:

$$\partial_\mu V_a^\mu = i\bar{q} \left[M, \frac{\lambda_a}{2} \right] q, \quad \partial_\mu A_a^\mu = i\bar{q} \gamma_5 \left\{ M, \frac{\lambda_a}{2} \right\} q. \quad (2.22)$$

Auf Grundlage der bisher gefundenen Zusammenhänge lassen sich vorläufig folgende Ergebnisse bzgl. der vier verschiedenen Symmetrie-Untergruppen der Gruppe $SU(3)_A \times SU(3)_V \times U(1)_A \times U(1)_V$ zusammenfassen:

$U(1)_V$: Der vektorielle Strom $V^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q$ spiegelt den Baryonenstrom wider. Die über ihn definierte Erhaltungsgröße, die Baryonenzahl B , ist für masselose und massive Quarks gleichermaßen erhalten, und wird daher als implizit betrachtet.

$U(1)_A$: Die axiale Anomalie bricht die betreffende $U(1)_A$ -Symmetrie explizit, sodass diese für die χ PT, die auf spontaner Symmetriebrechung basiert, nicht weiter von Belang ist. Dieses quantenmechanische Phänomen hat allerdings wichtige physikalische Folgen und soll in Kap. 3.1.3 im Hinblick auf das η' -Meson kurz wieder aufgegriffen werden. Massenterme der Form (2.21a) in der Lagrangedichte liefern darüber hinaus zusätzliche Beiträge zur nichtverschwindenden Divergenz des korrespondierenden Stroms $A^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q$.

⁹ Für Baryonen nimmt diese den Wert +1, für Antibaryonen den Wert -1 und weitergehend für Quarks bzw. Antiquarks die Werte $\pm \frac{1}{3}$ an

$SU(3)_V$: Aufgrund der Kommutations-Relation (2.22) in der Divergenz der vektoriellen Ströme V_a^μ bleibt diese Symmetrie für entartete Quarkmassen erhalten. Da diese Massenentartung gemessen an der Skala Λ_{QCD} durchaus plausibel erscheint, gründeten bspw. Murray Gell-Mann und Yuval Ne'eman 1964 ihr erstes Modell der starken Wechselwirkung auf der Erhaltung dieser Symmetrie, um das bis dahin bekannte Teilchenspektrum zu erklären [13]. Die Annahme einer zugrunde liegenden $SU(3)$ -Symmetrie der starken Wechselwirkung bezog sich zur damaligen Zeit aufgrund der experimentellen Unkenntnis der drei schweren Quarks auf Flavor-Triplets. Später wurde diese durch das Postulat eines weiteren Freiheitsgrades (der Farbladung) durch die $SU(3)_C$ -Symmetrie ersetzt und weitere Quarks wurden vorhergesagt und nachgewiesen. Für die folgenden Ausführungen dieser Arbeit gilt die Annahme von drei Flavours (*up*, *down* und *strange*) ohne Massenentartung.

$SU(3)_A$: Die acht axialen Ströme A_a^μ erhalten durch nichtverschwindende Massenterme jeglicher Art eine endliche Divergenz, sodass die zugrunde liegende Symmetrie explizit gebrochen ist. Um das Spektrum der Mesonen zu erklären, bedarf es allerdings einer vorangestellten spontanen Symmetriebrechung der $SU(3)_A$.

Im folgenden Kapitel wird das Konzept der χ PT auf der Kombination einer *spontanen* und einer durch kleine Quarkmassen induzierten *expliziten* Symmetriebrechung aufgebaut.

3. Die chirale Störungstheorie

Berücksichtigt man die im letzten Kapitel gefundene $SU(3)_A \times SU(3)_V$ -Symmetrie der QCD-Lagrangedichte, liegt die Vermutung nahe, dass sich die Baryonen- und insbesondere die Mesonen-Zustände in Multipletts bzgl. dieser Gruppe anordnen. Unter Hinzunahme der Ladungs-Operatoren

$$Q_{V,a} = \int d^3x V_a^0 = \int d^3x q^\dagger \frac{\lambda_a}{2} q \quad \text{und} \quad Q_{A,a} = \int d^3x A_a^0 = \int d^3x q^\dagger \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q, \quad (3.1)$$

die sich aus den entsprechenden Strömen in Gl. (2.17) ergeben, würde sich im Fall einer exakten $SU(3)_A \times SU(3)_V$ -Symmetrie ein bzgl. der Parität entartetes Teilchenspektrum zeigen.

Beweis:

Sei $|n\rangle$ Eigenzustand von $\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0$ mit $\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0 |n\rangle = E_n |n\rangle$ und o.B.d.A. $P |n\rangle = + |n\rangle$, dann gilt mit $|\phi\rangle = Q_{A,a} |n\rangle$:

$$\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0 |\phi\rangle = \underbrace{\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0 Q_{A,a} |n\rangle}_{(3.2a)} = Q_{A,a} \mathcal{H}_{\text{QCD}}^0 |n\rangle = Q_{A,a} E_n |n\rangle = E_n Q_{A,a} |n\rangle = E_n |\phi\rangle. \quad (3.2)$$

Der Zusammenhang (3.2a) folgt aus dem Coleman'schen Theorem [14] und der Annahme einer exakten $SU(3)_A$ -Symmetrie:

$$SU(3)_A \text{ exakt} \quad \Rightarrow \quad Q_{A,a} |0\rangle = 0 \quad \stackrel{\text{Coleman}}{\Leftrightarrow} \quad [Q_{A,a}, \mathcal{H}_{\text{QCD}}^0] = 0. \quad (3.2a)$$

Neben der Eigenwertgleichung (3.2) lässt sich über die implizite Parität der axialen Ladung die Gesamtparität des Zustands $|\phi\rangle$ ermitteln:

$$P |\phi\rangle = P Q_{A,a} |n\rangle = P Q_{A,a} P^{-1} P |n\rangle = -Q_{A,a} (+ |n\rangle) = -|\phi\rangle. \quad (3.3)$$

□

Die Annahme einer exakten $SU(3)_A$ -Symmetrie impliziert also zu jedem Zustand $|n\rangle$ positiver Parität einen energie-(bzw. massen-)entarteten¹⁰ Zustand $|\phi\rangle$ negativer Parität. Da dies weder im Baryonen-, noch im Mesonen-Sektor beobachtet wird, kann eine durch $Q_{A,a} |0\rangle \neq 0$ induzierte spontane Symmetriebrechung von $SU(3)_A \times SU(3)_V$ auf $SU(3)_V$ angenommen werden.

3.1. Spontane Symmetriebrechung und Goldstone-Theorem

Um die spontane Brechung der $SU(3)_A$ -Symmetrie zu erklären, bietet es sich zunächst an, ein Minimalbeispiel zu betrachten: Sei Φ ein komplexes skalares Feld mit der allgemeinen Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^* \partial^\mu \Phi - \underbrace{\left(\frac{m^2}{2} \Phi^* \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi^* \Phi)^2 \right)}_{:=V(\Phi)}, \quad \text{mit} \quad \Phi := \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 + i\Phi_2), \quad (3.4)$$

sodass die so beschriebene renormierbare Φ^4 -Theorie eine globale $U(1)$ -Symmetrie besitzt. Das Potential $V(\Phi)$ werde weitergehend im Grundzustand durch den Vakuumerwartungs-

¹⁰ Für Quarkmassen mit $m_q \ll \Lambda_{\text{QCD}}$ sollte dies zumindest näherungsweise erfüllt sein

wert (VEV) des Feldes minimiert:

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle := \Phi_0, \quad \text{sodass} \quad \left. \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi_1} \right|_{\Phi=\Phi_0} = \left. \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi_2} \right|_{\Phi=\Phi_0} = 0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_0 = \left\{ 0, \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \right\}. \quad (3.6)$$

Da das Feld unter der U(1)-Symmetrie so transformiert werden kann, dass Φ_0 o.B.d.A. nur reelle Werte annimmt (vgl. Gl. 3.6), kann das Potential bzgl. einer Fallunterscheidung in m^2 folgendermaßen in Φ_1 skizziert werden:

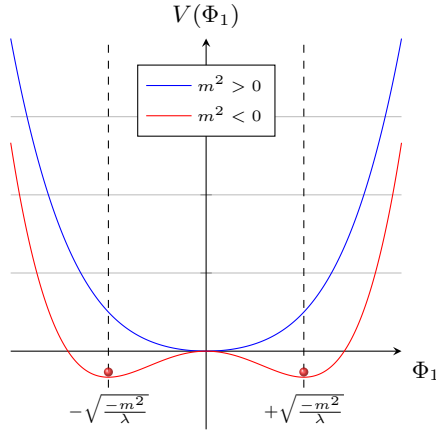


Abbildung 3.1: Skizzierter Verlauf von $V(\Phi_1)$

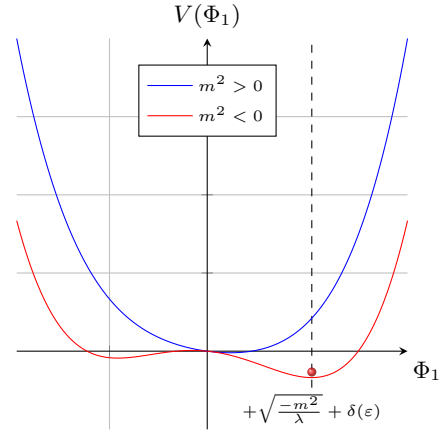


Abbildung 3.2: Potential mit Störung: $V(\Phi_1) + \epsilon \Phi_1$

In Abb. 3.1 und Gl. (3.6) werden zwei Fälle erkennbar:

- (i) Für $m^2 > 0$ existiert genau eine reelle Lösung für das Minimum des Potentials bei $\Phi_0 = 0$. Der VEV des Feldes verschwindet also und die zugrunde liegende Symmetrie ist damit exakt. (*Wigner-Weyl-Modus*)
- (ii) Wählt man $m^2 < 0$, ergeben sich drei reelle Extremstellen des Potentials, von denen zwei den Minima $\Phi_{\pm} := \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}$ entsprechen. (*Nambu-Goldstone-Modus*)

Die Auswahl eines der beiden Minima im Fall (ii) durch infinitesimale Fluktuationen führt nun dazu, dass die U(1)-Symmetrie der ursprünglichen Lagrangedichte zwar im Sinne des Noether-Theorems erfüllt, allerdings durch den nichtverschwindenden VEV des Feldes spontan gebrochen ist.

Ein Überlagerungszustand der positiven und negativen Lösung ist i.A. nicht möglich, da das Feld durch beliebig kleine ungerade Störungen des Potentials $V(\Phi)$ auf einen der beiden möglichen VEVs festgelegt (vgl. Abb. 3.2 u. [1]) wird.

3.1.1. Brechung einer globalen nicht-abelschen SO(3)-Symmetrie

Analog zu Gl. (3.4) lässt sich für ein reelles vektorielles Feld $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ die renormierbare Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \Phi_i \partial^{\mu} \Phi_i - \underbrace{\left(\frac{m^2}{2} \Phi_i \Phi_i + \frac{\lambda}{4} (\Phi_i \Phi_i)^2 \right)}_{:=V(\vec{\Phi})} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

formulieren.

Diese unterliegt einer globalen $SO(3)$ -Symmetrie bzgl. der Symmetrie-Transformation (s. App. D):

$$\vec{\Phi} \rightarrow \exp \left[-i \sum_{a=1}^3 \Theta_a T_a \right] \vec{\Phi} := U \vec{\Phi}. \quad (3.8)$$

Bestimmt man das Minimum des Potentials $V(\vec{\Phi})$, ergibt sich:

$$|\vec{\Phi}_0| = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} = \sqrt{\Phi_{1,0}^2 + \Phi_{2,0}^2 + \Phi_{3,0}^2} := v. \quad (3.9)$$

Der VEV des Feldes kann in diesem Fall also nicht mehr zwei diskrete reelle Werte annehmen, sondern bildet eine (3-1)-dimensionale Mannigfaltigkeit. Aufgrund der ursprünglichen $SO(3)$ -Symmetrie, lässt sich $\vec{\Phi}$ o.B.d.A. so transformieren, dass nach Symmetriebrechung bzw. Auswahl eines Grundzustandes aus Gl. (3.9) gilt:

$$\vec{\Phi}_0 = v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10a)$$

$$\text{mit } T_1 \vec{\Phi}_0 \neq 0, \quad T_2 \vec{\Phi}_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad T_3 \vec{\Phi}_0 = 0. \quad (3.10b)$$

Vor und nach Festlegung des Grundzustandes lässt sich die spontan gebrochene Symmetrie des vektoriellen Feldes analog zu Abb. 3.1 und 3.2 durch die in Abb. 3.3 und 3.4 gegebenen Skizzen darstellen.¹¹

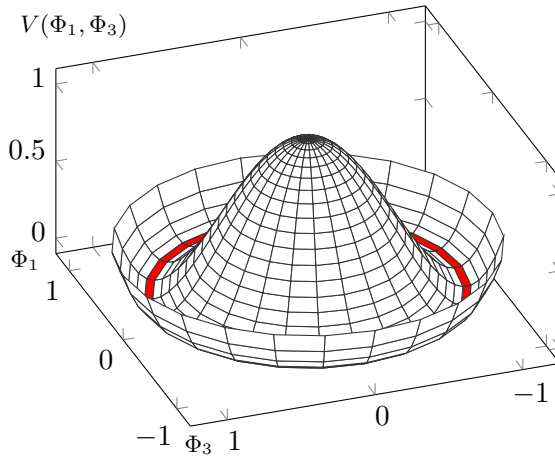


Abbildung 3.3: Potential: $V(\Phi_1, \Phi_3)$ mit rot gefärbten Minima

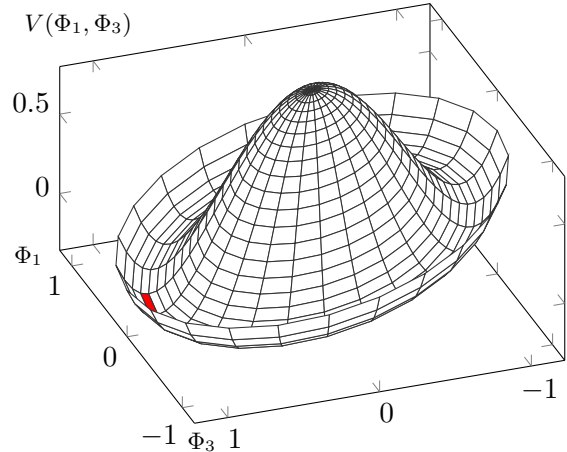


Abbildung 3.4: Gestörtes Potential $V(\Phi_1, \Phi_3) - \epsilon \Phi_3$

Da der VEV der dritten Feldkomponente einen nichtverschwindenden Wert v angenommen hat, wurde die vollständige Drehsymmetrie $SO(3)$ also spontan auf die Gruppe $SO(2)$ gebrochen, die nur noch zweidimensionale Drehungen zulässt¹².

Um die verbleibenden Freiheitsgrade zu charakterisieren, wird Φ_3 gemäß

$$\Phi_3 = v + \phi \quad (3.11)$$

um v entwickelt und in die Lagrangedichte eingesetzt. Unter Vernachlässigung konstanter

¹¹ Dabei wurde der Plot o.B.d.A. auf die Komponenten Φ_1 und Φ_3 beschränkt

¹² Im späteren Verlauf wird sich zeigen, dass der endliche VEV für die spontane chirale Symmetriebrechung einem nichtverschwindenden Quark-Antiquark-Kondensat $\langle \bar{q}q \rangle$ entspricht

Terme transformiert sich die Lagrangedichte mit der neuen Feldkomponente ϕ zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_k \partial^\mu \Phi_k + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad k = 1, 2 \\ & - \left(\frac{1}{2} (-2m^2) \phi^2 + \lambda v \phi (\Phi_k \Phi_k + \phi^2) + \frac{\lambda}{4} ((\Phi_k \Phi_k)^2 + \phi^2)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.1.2. Goldstone-Theorem

Nach spontaner Symmetriebrechung äußern sich die drei Freiheitsgrade der Lagrangedichte also in zwei masselosen bosonischen Feldern $\Phi_{1,2}$ und einem Boson¹³ der Masse $m_\phi^2 = -2m^2$. Betrachtet man die zu T_a korrespondierenden (Gl. 3.8) Generatoren Q_a im Hilbertraum, sodass die Symmetrie-Transformation der Felder über

$$\vec{\Phi} \rightarrow \exp \left[-i \sum_{a=1}^3 \Theta_a T_a \right] \vec{\Phi} = \exp \left[i \sum_{b=1}^3 \Theta_b Q_b \right] \vec{\Phi} \exp \left[-i \sum_{c=1}^3 \Theta_c Q_c \right] \quad (3.13)$$

dargestellt werden kann, folgt nach [1] mit der generischen Darstellung der Drehmatrizen (s. App. D):

$$\langle 0 | \Phi_3 | 0 \rangle = \langle 0 | \exp \left[i \frac{\pi}{2} Q_2 \right] \Phi_1 \exp \left[-i \frac{\pi}{2} Q_2 \right] | 0 \rangle \stackrel{!}{=} v, \quad (3.14a)$$

$$\Rightarrow Q_2 | 0 \rangle \neq 0, \quad \text{wegen} \quad \langle 0 | \Phi_1 | 0 \rangle = 0. \quad (3.14b)$$

Analoges ergibt sich für den Generator Q_1 und damit insgesamt:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Phi_1 | 0 \rangle = 0 & \quad Q_1 | 0 \rangle \neq 0, \\ \langle 0 | \Phi_2 | 0 \rangle = 0 & \quad \Leftrightarrow \quad Q_2 | 0 \rangle \neq 0, \\ \langle 0 | \Phi_3 | 0 \rangle = v & \quad Q_3 | 0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Zusammenfassend werden durch die spontane Symmetriebrechung bzgl. der beiden Generatoren $Q_{1,2}$ also zwei masselose Bosonen erzeugt. Das Goldstone-Theorem verallgemeinert dies folgendermaßen:

Bei der spontanen Brechung einer exakten Symmetriegruppe G mit insgesamt n_G Generatoren zu einer verbleibenden Gruppe H mit n_H Generatoren entstehen $\dim G/H = n_G - n_H$ masselose *Goldstone-Bosonen* [16].

3.1.3. Explizite Symmetriebrechung

Wird der in Kap. 3.1.1. beschriebenen Lagrangedichte beispielhaft ein explizit symmetriebrechender Term gemäß

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + a \Phi_3 \quad (3.16)$$

hinzugefügt, finden sich in der Gleichung zur Bestimmung des Potential-Minimums über die einfachen partiellen Feldableitungen konstante Störterme mit nichtlinearen Abhängigkeiten in a . Entwickelt man die Lösung für kleine Werte der so definierten perturbativen Größe, ergibt sich

$$\langle 0 | \Phi_3 | 0 \rangle = \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} + a \frac{1}{2m^2} + \mathcal{O}(a^2) \quad (3.17)$$

als neuer Ausdruck für den VEV.

¹³ Die Entsprechung dieses Teilchens im Rahmen der elektroschwachen Symmetriebrechung ist das bekannte Higgs-Boson

Nach Einsetzen in die Lagrangedichte finden sich analog zu Gl. (3.12) in erster Ordnung folgende Werte für die nun endlichen Massen der Goldstone-Bosonen:

$$m_{\Phi_1}^2 = m_{\Phi_2}^2 = a \sqrt{\frac{\lambda}{-m^2}} + \mathcal{O}(a^2). \quad (3.18)$$

Auf die eingeführte chirale Symmetriegruppe $SU(3)_A \times SU(3)_V$ der QCD mit drei Quarkflavors übertragen bedeutet dies:

- (i) Die exakte $SU(3)_A \times SU(3)_V$ -Symmetrie wird spontan zur $SU(3)_V$ gebrochen, sodass $(n_A + n_V) - n_V = 8$ masselose Goldstone-Bosonen entstehen. Die symmetriebrechenden Operatoren, die das Vakuum nach spontaner Brechung nicht mehr vernichten, entsprechen den korrespondierenden Noether-Ladungen in Gl. (3.1): $Q_{A,a} |0\rangle \neq 0$.
- (ii) Da die $SU(3)_A$ -Symmetrie durch die nichtverschwindenden Quarkmassen außerdem explizit gebrochen wird, erhalten die entstandenen Zustände eine endliche Masse (vgl. Gl. (3.18)) - man spricht von *Pseudo-Goldstone-Bosonen*. Diese können nach ihren Quantenzahlen im *Mesonen-Oktett* dargestellt werden:

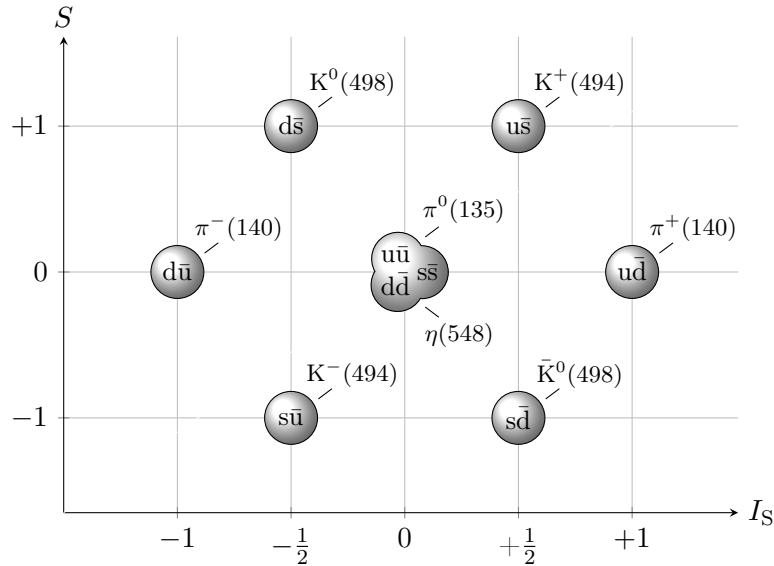


Abbildung 3.5: Oktettdarstellung der pseudoskalaren Mesonen aufgespalten anhand der Quantenzahlen Strangeness S und starkem Isopin I_S mit Quarkinhalt und jeweiliger Mesonenmasse in MeV [15]

Zieht man den Vergleich der in (i) beschriebenen spontanen Symmetriebrechung mit dem als Higgs-Mechanismus bekannten elektroschwachen Analogon, liegt die Vermutung nahe, dass entsprechend zum massiven Higgs-Boson ein in Gl. (3.12) beschriebenes massives bosonisches skalares Feld erzeugt wird. Tatsächlich existiert mit dem η' ein neuntes pseudoskalares Meson, das sich aus den drei leichten Quarkflavors ergibt und dessen Masse mit $m_{\eta'} \approx 958 \text{ MeV}$ in der Größenordnung von Λ_{QCD} liegt [15]. Deutlicher wird die Rolle des neunten Mesons aus einer anderen Perspektive:

In [11] und [12] wird die Masse des η' durch die axiale $U(1)_A$ -Anomalie erklärt. Unter Vernachlässigung der expliziten Brechung dieser Symmetrie würde eine spontane Symmetriebrechung der Form $U(3)_A \times SU(3)_V \rightarrow SU(3)_V$ zu insgesamt *neun* Pseudo-Goldstone-Bosonen mit kleiner endlicher Masse führen. Da der Anteil der $U(1)_A$ allerdings unabhängig von der Quark-Masse explizit gebrochen ist, „bewahrt“ die chirale Anomalie das η' gewissermaßen davor, als leichtes Pseudo-Goldstone-Boson aus der spontanen Symmetriebrechung hervorzugehen [11]. Insgesamt ergibt sich damit eine *Kondensation* von zwei Triplets zu einem Oktett und einem Singulett: $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$. Diese Betrachtung wird

durch die empirische Beobachtung gestützt, dass für hochenergetische Stöße, in denen die $U(1)_A$ -Symmetrie teilweise restauriert wird, das η' mit einer um etwa 200 MeV reduzierten Masse nachgewiesen wird. Die folgenden Abschnitte der Arbeit sollen sich weitergehend auf das in Abb. 3.5 dargestellte Mesonen-Oktett beschränken.

3.2. Das (pseudo-)skalare Quarkcondensat

Bisher konnte die Existenz von acht im Vergleich zur Massenskala leichten Pseudo-Goldstone-Bosonen durch spontane und explizite Symmetriebrechung der $SU(3)_A$ hergeleitet werden. Um den Quarkinhalt dieser Teilchen mit dem Quark-Antiquark-Kondensat in Verbindung zu bringen, werden die jeweils neun skalaren und pseudoskalaren Quarkdichten¹⁴

$$S_a(x) := \bar{q}(x)\lambda_a q(x), \quad P_a(x) := \bar{q}(x)\gamma_5\lambda_a q(x) \quad i = 0, \dots, 8, \quad (3.19a)$$

$$\text{mit} \quad \lambda_0 := \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1} \quad (3.19b)$$

definiert, sodass diese positives bzw. negatives Paritätsverhalten aufweisen. Nach [1] ergeben sich damit über die Vertauschungsrelationen der Generatoren λ_a die Kommutatoren

$$[Q_{V,a}(t), S_0(x)] = 0 \quad a = 1, \dots, 8, \quad (3.20a)$$

$$\text{und} \quad [Q_{V,a}(t), S_b(x)] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} S_c(x) \quad a, b = 1, \dots, 8, \quad (3.20b)$$

$$\Leftrightarrow \quad S_a(x) = -\frac{i}{3} \sum_{b,c}^8 f_{abc} [Q_{V,b}(t), S_c(x)] \quad a = 1, \dots, 8, \quad (3.20c)$$

für die skalaren Quarkdichten.

Aus Gl. (3.20b) folgt dann wegen $Q_{V,a}(t)|0\rangle = 0$ im chiralen Grenzfall:

$$0 = \langle 0 | [Q_{V,a}(t), S_b(x)] | 0 \rangle = \underbrace{\langle 0 | i \sum_{c=1}^8 f_{abc} S_c(x) | 0 \rangle}_{|0\rangle \text{ translationsinvariant}} = \langle 0 | i \sum_{c=1}^8 f_{abc} S_c(0) | 0 \rangle. \quad (3.21)$$

Fasst man das Ergebnis in Gl. (3.21) für alle $a, b = 1, \dots, 8$ zusammen, erhält man¹⁵

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle. \quad (3.22)$$

Da für das skalare Singulett $S_0(x)$ nach Gl. (3.20a) keine zu (3.21) analoge Aussage möglich ist, kann $\langle 0 | S_0(0) | 0 \rangle \neq 0$ angenommen werden, sodass mit (3.22) gilt:

$$3\langle \bar{u}u \rangle = 3\langle \bar{d}d \rangle = 3\langle \bar{s}s \rangle = \langle \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \rangle = \langle \bar{q}q \rangle \neq 0. \quad (3.23)$$

Betrachtet man analog die Kommutatoren der pseudoskalaren Quarkdichten $P_a(y)$, ergibt sich:

$$i [Q_{A,a}(t), P_a(x)] = \begin{cases} \bar{u}u + \bar{d}d & a = 1, 2, 3, \\ \bar{u}u + \bar{s}s & a = 4, 5, \\ \bar{d}d + \bar{s}s & a = 6, 7, \\ \frac{1}{3} (\bar{u}u + \bar{d}d + 4\bar{s}s) & a = 8. \end{cases} \quad (3.24)$$

¹⁴ Aus mathematischen Gründen wird hier entgegen der Konvention die raum-zeitliche Abhängigkeit der Felder und Operatoren explizit angegeben

¹⁵ Im Folgenden wird die Notation $\langle \bar{q}q \rangle := \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$ verwendet

Unter Annahme eines nichtverschwindenden $\bar{q}q$ -Kondensates (Gl. (3.23)) findet sich schlussendlich:

$$\langle 0 | i [Q_{A,a}(t), P_a(x)] | 0 \rangle = \frac{2}{3} \langle \bar{q}q \rangle \neq 0 \quad (3.25a)$$

$$\Leftrightarrow Q_{A,a}(t) | 0 \rangle \neq 0. \quad (3.25b)$$

Dieser Zusammenhang beschreibt die Abhängigkeit eines nichtverschwindenden Quark-Antiquark-Kondensates als gebundenen Zustand von der spontanen Symmetriebrechung der $SU(3)_A$ durch die Operatoren $Q_{A,a}(t)$.

Die acht interpolierenden Felder ϕ_a

$$\phi_a := i\bar{q}\gamma_5\lambda_a q \quad a = 1, \dots, 8, \quad (3.26)$$

die den pseudoskalaren Quark-Antiquark-Kondensaten entsprechen, können so im chiralen Grenzfall mit den acht masselosen Goldstone-Bosonen identifiziert werden.

3.3. Parametrisierung und Transformationsverhalten der Goldstone-Bosonen

Um mit den bisher gewonnenen theoretischen Erkenntnissen physikalische Gegebenheiten und Größen zu untersuchen, wird in den folgenden Kapiteln eine effektive Theorie und daraus folgend die *effektive Lagrangedichte* der Mesonen konstruiert. Da die Felder in Gl. (3.26) unter chiraler Transformation gemäß Gl. (2.11) ein kompliziertes Verhalten aufweisen, muss im Folgenden eine Darstellung gefunden werden, die einem einfachen linearen Transformationsverhalten unterliegt.

Ausgehend von einer linearen Parametrisierung, die nichtlinear transformiert, liegt es nahe, dass eine geeignete nichtlineare Darstellung linear transformiert. Eine übliche Parametrisierung der acht Felder ϕ_a im chiralen Grenzfall nach [17] gemäß

$$\Phi := \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\pi} \\ \vec{K} \\ \eta_8 \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \pi^\pm &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2), & K^\pm &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (K_4 \mp iK_5), \\ K^0 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (K_6 - iK_7), & \bar{K}^0 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (K_6 + iK_7), \\ \pi^0 &:= \pi_3 \quad \text{und} & \eta &:= \eta_8 \end{aligned} \quad (3.28)$$

ergibt die nichtlineare Exponentialdarstellung

$$U = \exp \left[\frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \right]. \quad (3.29)$$

Der Parameter F_0 soll zunächst ohne weitere Definition als Konstante der Massendimension (+1) angesehen werden, sodass das Argument der Exponentialfunktion dimensionslos ist. Die Variablen der Goldstone-Bosonen sind lokal isomorph¹⁶ zur Faktorgruppe G/H der *Linksnebenklassen* von H .

¹⁶ Der Beweis der Isomorphie ist in wenigen Schritten unter anderem in den Quellen [1] und [17] nachzulesen

Diese sind definiert über

$$G/H = \{gH | g \in G\}, \quad \text{mit} \quad gH = \{gh | h \in H; g \in G\}. \quad (3.30)$$

G und H sind dabei durch die Symmetriegruppen $SU(3)_A \times SU(3)_V$ und $SU(3)_V$ vor und nach der spontanen Symmetriebrechung gegeben. Damit findet sich für die Gruppen G und H :

$$G := \{(L, R) | L, R \in SU(3)\} = SU(3) \times SU(3), \quad (3.31a)$$

$$H := \{(V, V) | V \in SU(3)\} \approx SU(3) \quad (3.31b)$$

und die Linksnebenklasse $\tilde{g}H \in G/H$ bzgl. $\tilde{g} = (\tilde{L}, \tilde{R}) \in G$:

$$\tilde{g}H = (\tilde{L}V, \tilde{R}V) = (\tilde{L}V, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger\tilde{L}V) = \underbrace{(\mathbb{1}, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger)}_{:= (\mathbb{1}, U)} \underbrace{(\tilde{L}V, \tilde{L}V)}_{\in H, \text{ da } (\tilde{L}, \tilde{L}) \in H}. \quad (3.32)$$

Die Matrix U lässt sich also eindeutig durch $\tilde{R}\tilde{L}^\dagger$ darstellen [17]. Eine (chirale) Transformation der Linksnebenklasse $\tilde{g}H$ erfolgt nach Definition durch Multiplikation mit einem $g = (L, R) \in G$, sodass:

$$g\tilde{g}H = (L, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H = (\mathbb{1}, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger L^\dagger) \underbrace{(L, L)H}_{\in H} = (\mathbb{1}, R \underbrace{(\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)}_{=U} L^\dagger)H. \quad (3.33)$$

Daraus ergibt sich für das Transformationsverhalten der Mesonen-Feldmatrix U unter chiraler Transformation schlussendlich die geforderte einfache lineare Operation

$$U \rightarrow RUL^\dagger. \quad (3.34)$$

Bzgl. der zu $SU(3)_V$ korrespondierenden Matrizen $(R, L) = (V, V)$ transformieren die durch U nichtlinear parametrisierten Felder immer noch wie ein Oktett. Für Matrizen (A^\dagger, A) aus der axialen Symmetriegruppe weisen sie dagegen nun ein nichtlineares Verhalten auf.

3.4. Effektive Feldtheorie

Der Grundgedanke einer *effektiven (Quanten-)Feldtheorie* beruht auf der Entwicklung einer effektiven Lagrangedichte in einer unendlichen Summe aus Termen, die neben den festen Gesetzen der *Kausalität*, *Unitarität* und dem *Clusterzerlegungsprinzip* ausschließlich durch die Symmetrien der fundamentalen Theorie definiert werden [18].

Nach Weinberg liefert die so konstruierte Lagrangedichte unter Berücksichtigung aller möglichen Terme die allgemeinste S-Matrix und damit die exakte Theorie. Die Freiheitsgrade der effektiven Theorie müssen dabei nicht den Freiheitsgraden der fundamentalen Theorie entsprechen - die drei fundamentalen Quarks der QCD-Lagrangedichte für drei Flavors werden bspw. in der effektiven Theorie durch die in Kap. 3.3 definierte Parametrisierung der Mesonenfelder ersetzt.

Entwickelt man die so gefundene effektive Lagrangedichte bzgl. einer bestimmten Energieskala, können die Terme nach ihrem Beitrag geordnet und die unendliche Summe in guter Näherung nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abgebrochen werden. Ein Resultat dieser Konstruktion ist, dass effektive Theorien in vielen Fällen nicht renormierbar sind.

3.4.1. Effektive Wechselwirkung skalarer Felder

Um die physikalischen Hintergründe effektiver Feldtheorien zu erfassen, bietet es sich an, ein einfaches Beispiel heranzuziehen. Betrachtet man die fundamentale Theorie zweier massiver

skalärer Felder ϕ und φ , lässt sich bspw. folgende Lagrangedichte mit einem trilinearen Wechselwirkungsterm definieren:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - M^2 \phi^2) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) - \frac{\lambda}{2} \phi \varphi^2. \quad (3.35)$$

Dabei sei durch $M^2 \gg m^2$ eine zugrunde liegende Skala definiert. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen¹⁷

$$\square \phi + M^2 \phi + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 = 0, \quad (3.36a)$$

$$\square \varphi + m^2 \varphi + \lambda \phi \varphi = 0, \quad (3.36b)$$

folgt unmittelbar

$$\square \varphi + m^2 \varphi - \frac{\lambda^2}{2M^2} \varphi \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\square}{M^2}}}_{\approx 1 \text{ für } M^2 \gg m^2} \varphi^2 = 0. \quad (3.37)$$

Das „schwere“ Feld ϕ kommt für die Grenzwertbetrachtung $\frac{\square}{M^2} \rightarrow 1$ nicht mehr explizit in der Bewegungsgleichung vor. Die so gegebene effektive Bewegungsgleichung leitet sich in führender Ordnung weitergehend aus der effektiven Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) + \frac{\lambda^2}{8M^2} \varphi^4 \quad (3.38)$$

her. Für den Grenzwert $p^2 \ll M^2$ geht der Propagator von ϕ in Gl. (3.37) also in einen konstanten Term über und die Austauschwechselwirkung reduziert sich zu einem 4-Vertex:

$$\tilde{G}_\phi(p^2) = \frac{1}{p^2 - M^2} \rightarrow \frac{1}{M^2} \quad \text{für } p^2 \ll M^2. \quad (3.39)$$

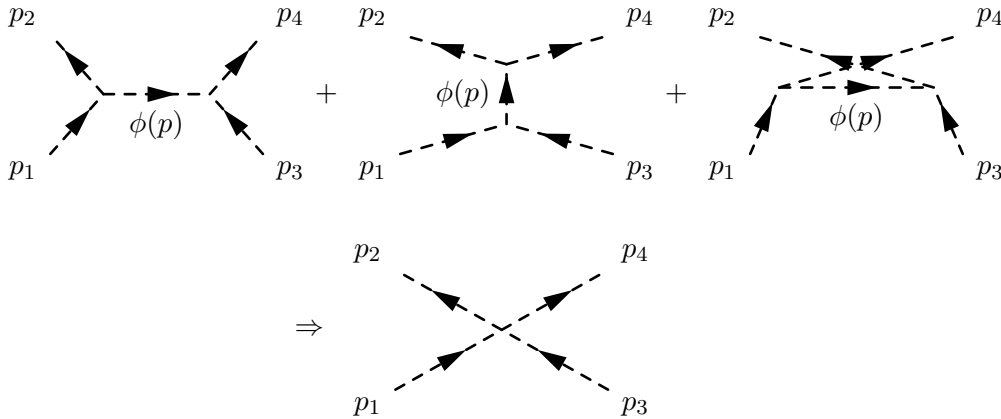


Abbildung 3.6: $\varphi(p_1) + \varphi(p_2) \rightarrow \varphi(p_3) + \varphi(p_4)$ in fundamentaler und effektiver Theorie

Die Masse M stellt also eine Skala für den Impulsübertrag p zwischen Teilchen φ im φ^4 -Wechselwirkungsterm in Gl. (3.38) dar, unterhalb derer die effektive Feldtheorie gültig ist und der Propagator in einen 4er-Vertex übergeht (vgl. Abb. 3.6). Es ist allerdings weiterhin festzuhalten, dass die Lagrangedichte in Gl. (3.38) aufgrund der Massendimension i.A. renormierbar ist. Analog zu dieser Herangehensweise leitet sich *Fermi's* nicht renormierbare *4-Fermion-Wechselwirkung* her, in der die verhältnismäßig große Masse der schwachen Eichbosonen die zu M analoge Skala liefert.

¹⁷ Der D'Alembertoperator \square ist gegeben durch $\square := \partial_\mu \partial^\mu$

3.4.2. Das Weinberg'sche Zählschema

Analog zum Minimalbeispiel aus Kap. 3.4.1 kann eine effektive Lagrangedichte aufbauend auf der QCD konstruiert werden, deren fundamentale Freiheitsgrade in Form von Quarks und Gluonen verschwinden und durch neue in der Darstellung der Mesonenfelder in Gl. (3.29) ersetzt werden. Dies ist physikalisch konsistent mit der Annahme, dass die Elementarteilchen im Niederenergie-Regime aufgrund des Confinements in kondensierten Zuständen gebunden sind.

Die Entwicklung des Wechselwirkungsterms im Minimalbeispiel (Kap. 3.4.1) wurde nach der führenden Ordnung abgebrochen. Es ist ersichtlich, dass weitere Ordnungen eine Summe aus Termen $\mathcal{L}_{2n} \sim p^{2n}$ liefern, sodass die effektive Lagrangedichte i.A. die Form

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_{2n} \hat{=} \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \dots \quad (3.40)$$

annimmt. Diese Entwicklung kann für niedrige Energien $p^2 < \Lambda_{\text{QCD}}^2$ nach einer endlichen Ordnung abgebrochen werden. Um das Schema auf allgemeine Terme bzgl. der Parametrisierung (3.29) anzuwenden, muss eine Methode gefunden werden, nach derer diese in ihrer Ordnung sortiert bzw. „abgezählt“ werden. Das *Weinberg'sche Zählschema* ordnet die in der allgemeinen Streuamplitude \mathcal{M} auftretenden Diagramme bzw. Terme anhand eines Skalenfaktors t , mit dem die äußeren Mesonenmassen M und -impulse p sowie die Quarkmassen m skaliert und die Terme i der Streuamplitude sortiert werden können:

$$M \rightarrow tM, \quad p \rightarrow tp \quad \text{und} \quad m \rightarrow t^2m, \quad (3.41a)$$

$$\text{sodass} \quad \mathcal{M}_i(tp, t^2M^2) \rightarrow t^D \mathcal{M}_i(p, M^2). \quad (3.41b)$$

Die Potenz D der Skalierung der Streuamplituden wird *chirale Dimension* genannt. Anhand der Transformationen in Gl. (3.41a) wird erkennbar, dass für „kleine“ Werte von M , p und m , gemessen an einer festen Skala Λ_{QCD} , Diagramme mit hoher chiraler Dimension unterdrückt sind.


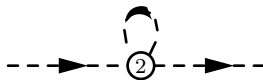
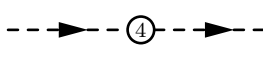
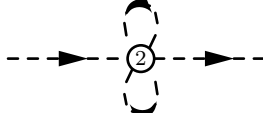
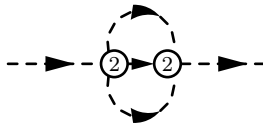

D	N_L	k	N_{2k}	Diagramm
2	0	1	0	
4	1	1	1	
	0	2		
6	2	1	1	
			2	
	1	2	1	

Tabelle 3.1: Diagramme der effektiven Mesonen-Lagrangedichte für die drei niedrigsten chiralen Dimensionen

Die allgemeine effektive Lagrangedichte aus Gl. (3.40) kann also nach Summanden einer endlichen Ordnung n abgebrochen werden. Weinberg hat die chirale Dimension eines Diagramms anhand seiner *Schleifen-* und *Vertex-Zahlen* N_L und N_{2k} bestimmt. Über das Skalierungsverhalten der impulserhaltenden Deltafunktionen in den Vertices und der Propagatorterme der inneren Linien N_I ergibt sich folgende Beziehung [18]:

$$D = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k-1)N_{2k} + 2N_L, \quad \text{da} \quad N_I = N_L + (N_{2k} - 1). \quad (3.42)$$

Die möglichen Diagramme, die sich bis zur chiralen Dimension $D = 6$ ergeben, sind in Tab. 3.1 anhand ihrer Vertex- und Schleifenzahlen sortiert und illustriert.

3.5. Konstruktion der effektiven Lagrangedichte für Mesonen

Mit der Exponentialdarstellung der Mesonenfelder (3.29) und dem entsprechenden chiralen Transformationsverhalten in Gl. (3.34) können nun Terme konstruiert werden, die geordnet nach ihrer chiralen Dimension die verschiedenen Ordnungen \mathcal{L}_{2n} der effektiven Lagrangedichte ergeben. Insgesamt werden vier Grundelemente für diese Konstruktion benötigt, deren Beitrag zur chiralen Ordnung und Transformationsverhalten unter den geforderten Symmetrien zunächst untersucht werden muss:

(i) Die Feldmatrix U der Mesonen

a) Chirale Transformation bzgl. $SU(3)_L \times SU(3)_R$

Das einfache lineare Transformationsverhalten wurde bereits in Kap. 3.3 wie folgt hergeleitet:

$$U \rightarrow RUL^\dagger, \quad \text{mit} \quad R \in SU(3)_R \quad \text{und} \quad L \in SU(3)_L. \quad (3.43)$$

b) Parität

Da es sich bei den Feldern ϕ_a in der Parametrisierung von U um pseudoskalare Größen handelt, ergibt sich folgendes Verhalten für U unter Paritätstransformation:

$$\mathcal{P}U = \exp \left[\frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \mathcal{P}\phi_a \right] = \exp \left[\frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a (-\phi_a) \right] = U^\dagger. \quad (3.44)$$

c) Ladungskonjugation

Für die Komponenten der Mesonenmatrix $\phi = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a$ in Gl. (3.27) ergibt sich

$$\mathcal{C}\pi^\pm = \pi^\mp, \quad \mathcal{C}K^\pm = K^\mp, \quad \mathcal{C}K^0 = \bar{K}^0, \quad \mathcal{C}\pi^0 = \pi^0, \quad \mathcal{C}\eta = \eta$$

und damit:

$$\mathcal{C}U = \exp \left[\frac{i}{F_0} \mathcal{C}\phi \right] = \exp \left[\frac{i}{F_0} \phi^T \right] = U^T. \quad (3.45)$$

Insgesamt lassen sich die benötigten Symmetrietransformationen also auf relativ einfache mathematische Operationen zurückführen. Weitergehend ist Exponentialdarstellung der Feldmatrix dimensionslos und enthält keine Ableitungsterme, sodass sie die chirale Ordnung $\mathcal{O}(p^0)$ trägt.

(ii) **Die kovariante Ableitung $D_\mu U$ der Feldmatrix bzgl. äußerer Felder**

Aufgrund der geforderten Kovarianz von D_μ transformiert die Ableitung der Feldmatrix $D_\mu U := \partial_\mu - ir_\mu U + iUl_\mu$ völlig analog zu U :

a) Chirale Transformation bzgl. $SU(3)_L \times SU(3)_R$

$$D_\mu U \rightarrow R(D_\mu U)L^\dagger, \quad (3.46)$$

b) Parität und Ladungskonjugation

$$\mathcal{P}(D_\mu U) = (D_\mu U)^T, \quad (3.47)$$

$$\mathcal{C}(D_\mu U) = (D_\mu U)^\dagger. \quad (3.48)$$

Des Weiteren trägt D_μ die Dimension eines Impulses, sodass der Gesamtterm die chirale Ordnung $\mathcal{O}(p^1)$ hat.

(iii) **Äußere Felder $F_{\mu\nu}$**

Die rechts- und linkshändigen Anteile eines allgemeinen Feldstärketensors sind definiert über

$$f_{\mu\nu}^R = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \quad (3.49a)$$

$$f_{\mu\nu}^L = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu] \quad (3.49b)$$

mit den zugehörigen Feldern r_μ und l_μ .

a) Chirale Transformation bzgl. $SU(3)_L \times SU(3)_R$

Die so definierten Komponenten von $F_{\mu\nu}$ transformieren sich bzgl. der chiralen Transformation gemäß

$$f_{\mu\nu}^R \rightarrow R f_{\mu\nu}^R R^\dagger \quad r_\mu \rightarrow R r_\mu R^\dagger + iR \partial_\mu R^\dagger, \quad (3.50a)$$

$$f_{\mu\nu}^L \rightarrow L f_{\mu\nu}^L L^\dagger \quad l_\mu \rightarrow L l_\mu L^\dagger + iL \partial_\mu L^\dagger. \quad (3.50b)$$

b) Parität

Durch Paritätstransformation werden links- und rechtshändige Felder vertauscht. Außerdem entspricht der Vorzeichenwechsel der räumlichen Komponenten einem Wechsel von kovarianter zu kontravarianter Darstellung, sodass sich insgesamt

$$\mathcal{P} f_{\mu\nu}^R = f^{L,\mu\nu}, \quad \mathcal{P} r_\mu = l^\mu, \quad (3.51a)$$

$$\mathcal{P} f_{\mu\nu}^L = f^{R,\mu\nu}, \quad \mathcal{P} l_\mu = r^\mu \quad (3.51b)$$

ergibt.

c) Ladungskonjugation

Unter Ladungskonjugation wird nicht nur die Händigkeit und die Ko- bzw. Kontravarianz der betreffenden Größen vertauscht, sondern auch die Stromrichtung der Felder. Damit zeigt sich folgendes Transformationsverhalten:

$$\mathcal{C} f_{\mu\nu}^R = - (f^{L,\mu\nu})^T, \quad \mathcal{C} r_\mu = - (l^\mu)^T, \quad (3.52a)$$

$$\mathcal{C} f_{\mu\nu}^L = - (f^{R,\mu\nu})^T, \quad \mathcal{C} l_\mu = - (r^\mu)^T. \quad (3.52b)$$

Die chirale Ordnung $\mathcal{O}(p^1)$ der Felder entspricht i.A. der eines Impulses, sodass nach (3.49a/b) für Feldstärketensoren die Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$ gefunden wird.

(iv) **Die Massenmatrix M der Quarks**

In den vorhergehenden Überlegungen wurde die chirale Symmetrie der effektiven Lagrangedichte bzgl. $SU(3)_R \times SU(3)_L$ als explizit erhalten angenommen. Aus Kap. 2.3.2 ist bekannt, dass endliche Quarkmassen bzw. eine nichtverschwindende Matrix M diese Symmetrie explizit bricht. Die Anwendung dieses symmetriebrechenden Mechanismus auf die per Konstruktion symmetrische Lagrangedichte stellt sich als relativ kompliziert dar. Ein Hilfsmittel, diesen in die Theorie einzubetten, ist die *Spurion-Analyse*, im Rahmen derer die Matrix M zunächst als nicht-konstant unter den geforderten Symmetrietransformationen angesehen wird, sodass betreffende Terme in \mathcal{L} gerade invariant bleiben. Zur eigentlichen Berechnung der physikalischen Größen wird das Spurion dann späterhin wieder als konstante Matrix definiert. Die Transformationseigenschaften von M , die die geforderten Symmetrieeigenschaften der Lagrangedichte erhalten, ergeben sich wie folgt:

a) Chirale Transformation bzgl. $SU(3)_L \times SU(3)_R$

$$M \rightarrow RML^\dagger, \quad (3.53)$$

b) Parität und Ladungskonjugation

$$\mathcal{P}M = M^T, \quad (3.54)$$

$$\mathcal{C}M = M^\dagger. \quad (3.55)$$

Da die quadratischen Mesonenmassen in niedrigster Ordnung proportional zu den Quarkmassen sind, hat die Massenmatrix M die chirale Dimension $\mathcal{O}(p^1)$ [19]. Die Parameter dieser Matrix sind weitergehend Quarkmassen, da sie sich auf Quarks als Freiheitsgrade beziehen. Um diese konsistent in die neuen Freiheitsgrade der effektive Theorie integrieren zu können, wird ein skalierender Faktor $2B_0$ eingeführt, sodass:

$$\chi := 2B_0M. \quad (3.56)$$

Das Transformationsverhalten und die chirale Ordnung der vier bzw. fünf Elemente zur Konstruktion einer effektiven Lagrangedichte fasst sich dann wie folgt zusammen:

Element	$SU(3)_L \times SU(3)_R$	\mathcal{P}	\mathcal{C}	Chirale Ordnung
U	RUL^\dagger	U^\dagger	U^T	$\mathcal{O}(p^0)$
$D_\mu U$	$R(D_\mu U)L^\dagger$	$(D_\mu U)^\dagger$	$(D_\mu U)^T$	$\mathcal{O}(p^1)$
$f_{\mu\nu}^R$	$Rf_{\mu\nu}^R R^\dagger$	$f^{\text{L},\mu\nu}$	$-(f^{\text{L},\mu\nu})^T$	$\mathcal{O}(p^2)$
$f_{\mu\nu}^L$	$Lf_{\mu\nu}^L L^\dagger$	$f^{\text{R},\mu\nu}$	$-(f^{\text{R},\mu\nu})^T$	$\mathcal{O}(p^2)$
χ	$R\chi L^\dagger$	χ^\dagger	χ^T	$\mathcal{O}(p^2)$

Tabelle 3.2: Transformationsverhalten und chirale Ordnung der Elemente von \mathcal{L}_{eff}

3.5.1. Die führende Ordnung

Konstruiert man die Lagrangedichte führender Ordnung für nichtverschwindende Quarkmassen, besteht diese aus Termen bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$. Um eine skalare Größe aus den matrixwertigen Funktionen zu erhalten, wird in der Lagrangedichte stets die Spur¹⁸ der betreffenden Terme gebildet.

Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(p^0)$ können nach Tab. 3.2 nur über die Feldmatrix U erzeugt werden. Um weitergehend die Symmetrieforderungen zu erfüllen, sind i.A. Spuren der Form

¹⁸ Die mathematische Schreibweise der Spuren wird nach Konvention abgekürzt (s. App. A)

$\langle UU^\dagger \rangle$ denkbar, die allerdings aufgrund der Unitarität von U ausschließlich konstante und damit vernachlässigbare Terme zu \mathcal{L} beitragen:

$$\langle UU^\dagger \rangle = \langle UU^\dagger UU^\dagger \rangle = \dots = 3, \quad \left(\langle UU^\dagger \rangle \right)^n = 3^n. \quad (3.57)$$

Die Konstruktion von Ausdrücken der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(p^1)$ gelingt lediglich durch Kombination der Feldmatrix und der kovarianten Ableitung der selbigen. Bildet man die Spur, verschwinden diese Terme allerdings [1]:

$$\langle D_\mu UU^\dagger \rangle = -\langle U (D_\mu U)^\dagger \rangle = 0. \quad (3.58)$$

Die niedrigsten nichttrivialen Terme der effektiven Lagrangedichte sind also von chiraler Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$. Diese können unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften mit den gegebenen Grundelementen in drei Varianten konstruiert werden:

Zum einen gelingt dies durch die Kombinationen von zwei Ableitungen mit der Feldmatrix und ihrer adjungierten Form:

$$\langle (D_\mu D_\nu U) U^\dagger \rangle, \quad \langle U (D_\mu D_\nu U)^\dagger \rangle \quad \text{und} \quad \langle (D_\nu U) (D_\mu U)^\dagger \rangle, \quad (3.59)$$

die allerdings äquivalent sind.

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle (D_\mu D_\nu) UU^\dagger \rangle &= \langle (\partial_\mu (D_\nu U) - i r_\mu (D_\nu U) + i (D_\nu U) l_\mu) U^\dagger \rangle \\ &= \underbrace{\partial_\mu \langle (D_\nu U^\dagger) U^\dagger \rangle}_{=0 \text{ (s.o.)}} - \langle (D_\nu U^\dagger) \partial_\mu U^\dagger \rangle \\ &\quad - i \langle r_\mu (D_\nu U^\dagger) U^\dagger \rangle + i \langle (D_\nu U^\dagger) l_\mu U^\dagger \rangle \\ &= - \langle (D_\nu U) (\partial_\mu U^\dagger + i U^\dagger r_\mu - i l_\mu U^\dagger) \rangle \\ &= - \langle (D_\nu U) (D_\mu U)^\dagger \rangle \end{aligned} \quad (3.60a)$$

$$\begin{aligned} &= - \langle (\partial_\nu U + i U r_\nu - i l_\nu U) (D_\mu U)^\dagger \rangle \\ &= \underbrace{\partial_\nu \langle (D_\mu U^\dagger) U^\dagger \rangle}_{=0 \text{ (s.o.)}} - \langle (D_\mu U^\dagger) \partial_\nu U^\dagger \rangle \\ &\quad - i \langle r_\nu (D_\mu U^\dagger) U^\dagger \rangle + i \langle (D_\mu U^\dagger) l_\nu U^\dagger \rangle \\ &= \langle U (D_\nu D_\mu U)^\dagger \rangle. \end{aligned} \quad (3.60b)$$

□

Aufgrund der Lorentzinvarianz müssen die Indices in Gl. (3.60a/b) kontrahierbar sein, sodass $\mu = \nu$ gelten muss. Weitere mögliche Terme der Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$, die über die Feldstärketensoren $f_{\mu\nu}^{\text{R/L}}$ äußerer Felder konstruiert werden können, liefern aufgrund der Tensoreigenschaften eine verschwindende Spur:

$$\langle U f_{\mu\nu}^{\text{L}} U^\dagger \rangle = \langle f_{\mu\nu}^{\text{R/L}} \rangle = 0. \quad (3.61)$$

Die verbleibenden Terme, die die gewünschte chirale Ordnung tragen und die Symmetrieforderungen erfüllen, sind durch das Spurion der Quarkmassenmatrix in Gl. (3.56) gegeben:

$$\langle \chi U^\dagger \rangle \quad \text{und} \quad \langle U \chi^\dagger \rangle. \quad (3.62)$$

Insgesamt lässt sich die effektive Lagrangedichte in führender Ordnung nach Skalierung zu einer physikalisch sinnvollen Dimension also zusammenfassen zu:

$$\mathcal{L}_{\text{LO}} \hat{=} \mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \rangle + \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle := \mathcal{L}_{\text{der}} + \mathcal{L}_{\text{sb}} \quad (3.63)$$

Es findet sich also ein *derivativer* und ein *symmetriebrechender* Term, der beim Übergang des Spurions χ zur physikalisch konstanten Massenmatrix die zunächst geforderte chirale Symmetrie explizit bricht.

Die Dynamik, die durch die führende Ordnung bestimmt wird, hängt also von einem expliziten Parameter F_0 und einem impliziten Parameter B_0 ab (s. Gl. (3.56)), deren physikalische Bedeutung im Folgenden kurz erläutert werden soll.

3.5.2. Die Kopplungskonstanten in führender Ordnung

Die auftretenden Konstanten entsprechen Entwicklungskoeffizienten, die experimentell oder in numerischen Simulationen bestimmt werden können. In der führenden Ordnung können diesen Parametern direkt physikalische Bedeutungen zugeordnet werden.

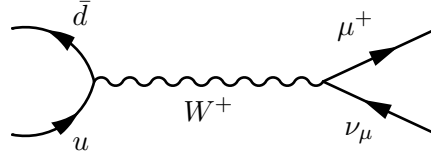


Abbildung 3.7: Vollständiges Diagramm des schwachen Zerfalls $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ über ein W^+ Boson

Betrachtet man den Mesonenzerfall über die Kopplung an ein schwaches Eichboson, das durch das äußere Feld l_μ beschrieben wird¹⁹ und über die kovariante Ableitung in Gl. (3.63) an die Feldmatrix U koppelt, ergibt sich für den derivativen Term:

$$\begin{aligned} \frac{F_0^2}{4} \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \rangle &= \frac{F_0^2}{4} \langle (\partial_\mu U + iU l_\mu) (\partial^\mu U^\dagger - i l^\mu U^\dagger) \rangle \\ &= i \frac{F_0^2}{2} \langle l_\mu \partial^\mu U^\dagger U \rangle + \dots + \mathcal{O}(l_\mu l^\mu). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Parametrisiert man l_μ weitergehend über

$$l_\mu = \sum_{a=1}^8 l_{\mu,a} \frac{\lambda_a}{2}, \quad (3.65)$$

erhält der führende Wechselwirkungsterm in Gl. (3.64) die folgende Form:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{LO}} = \sum_{a=1}^8 l_{\mu,a} \underbrace{\left(i \frac{F_0^2}{4} \langle \lambda_a \partial^\mu U^\dagger U \rangle \right)}_{=L_a^\mu \text{ (s. [1])}}, \quad (3.66)$$

sodass nach Entwicklung der Matrix U gemäß Gl. (3.29) der Strom die Gestalt

$$L_a^\mu = \frac{F_0}{2} \partial^\mu \phi_a + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (3.67)$$

annimmt. Das Matrixelement, dessen Überlapp mit dem linkshändigen schwachen Strom für den Zerfall eines Mesons in ein schwaches Eichboson verantwortlich ist, kann also in

¹⁹ Für die schwache Wechselwirkung gilt $r_\mu = 0$

führender Ordnung bzgl. ϕ_a folgendermaßen ausgewertet werden:

$$\langle 0 | L_a^\mu(0) | \phi_b(p) \rangle = \frac{F_0}{2} \langle 0 | \partial^\mu \phi_a(x) | \phi_b(p) \rangle = -i p^\mu \frac{F_0}{2} \delta_{ab}. \quad (3.68)$$

Die Konstante F_0 entspricht also der *Mesonenerfallskonstanten in führender Ordnung der chiralen Störungstheorie*.

Wie in Kap. 3.1 gezeigt, wird bei der spontanen Symmetriebrechung der zunächst beliebige endliche Vakuumerwartungswert durch kleine Störungen festgelegt. Diese Störung ist in der führenden Ordnung der effektiven Lagrangedichte durch die Massenmatrix der Quarks gegeben. Es ist also zu erwarten, dass die „Richtung“ des VEV's nicht völlig willkürlich ausgewählt wird. Der VEV der effektiven Energiedichte im Grundzustand $U_0 = \mathbb{1}$ berechnet sich nach [1] zu

$$\langle 0 | \mathcal{H}_{\text{LO}} | 0 \rangle_0 = -F_0^2 B_0 (m_u + m_d + m_s). \quad (3.69)$$

Des Weiteren muss für die fundamentale Theorie gelten:

$$\left. \frac{\partial \langle 0 | \mathcal{H}_{\text{QCD}} | 0 \rangle}{\partial m_q} \right|_{m_u=m_d=m_s=0} = \frac{1}{3} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle_0 = \frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle_0, \quad (3.70)$$

sodass sich insgesamt

$$3F_0^2 B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle_0 \quad (3.71)$$

ergibt. Die Niederenergiekonstante B_0 hängt also eng mit dem nichtverschwindenden symmetriebrechenden Erwartungswert des Quark-Kondensats (s. Kap. 3.2) zusammen.

3.5.3. Die nächstführende Ordnung

In der nächstführenden Ordnung der effektiven Lagrangedichte werden alle Terme mit der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ betrachtet. Gasser und Leutwyler haben diese 1985 zum ersten mal identifiziert und zusammengefasst [20]. Die so gewonnene Lagrangedichte enthält zwei Arten von Termen:

Zum einen finden sich zehn Terme mit Entwicklungskoeffizienten L_i , in denen die Feldmatrix der Mesonen nichtlinear vertreten ist und die damit zu Schleifen- und Kontaktkorrekturen zur Selbstenergie der entsprechenden Felder beitragen (vgl. Tab. 3.1). Zum anderen werden zwei weitere Kontaktterme mit den Parametern H_1, H_2 gefunden, die auf den ersten Blick unphysikalisch erscheinen, aber bei Betrachtung von Zerfallsprozessen entscheidend zur Renormierbarkeit der i.A. nicht renormierbaren effektiven Feldtheorie beitragen. Insgesamt kann die Lagrangedichte in ihrer allgemeinsten Form wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO}} &\hat{=} \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4, \\ \text{mit} \quad \mathcal{L}_4 &= L_1 \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \rangle^2 + L_2 \langle D_\mu U (D_\nu U)^\dagger \rangle \langle D^\mu U (D^\nu U)^\dagger \rangle \\ &\quad + L_3 \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger \rangle + L_4 \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle \\ &\quad + L_5 \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \rangle + L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 \\ &\quad + L_7 \langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle^2 + L_8 \langle U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \rangle^2 \\ &\quad - i L_9 \langle f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger D^\nu U \rangle + L_{10} \langle U f_{\mu\nu}^L U^\dagger f^{R,\mu\nu} \rangle \\ &\quad + H_1 \langle f_{\mu\nu}^R f^{R,\mu\nu} \rangle + H_2 \langle \chi \chi^\dagger \rangle \end{aligned}$$

(3.72)

Die insgesamt zwölf Terme beschreiben die Dynamik bis zur gegebenen Ordnung der zugrunde liegenden Störungstheorie vollständig. Die Anzahl der Entwicklungskoeffizienten, die i.A. als LECs (*Low-Energy-Constants*) bezeichnet werden, nimmt für höhere Ordnungen schnell zu (s. Tab. 3.3). Der Rahmen dieser Arbeit soll sich ausschließlich auf die führenden und nächstführenden Beiträge der effektiven Theorie beschränken.

Chirale Ordnung	Bezeichnung der Parameter	Anzahl der Parameter
$\mathcal{O}(p^2)$	F_0, B_0	2
$\mathcal{O}(p^4)$	L_i, H_i	10+2
$\mathcal{O}(p^6)$	C_i	90+4

Tabelle 3.3: Anzahl (*Schleifen- + Kontaktterme*) der LECs bis $\mathcal{O}(p^6)$ der effektiven Lagrangedichte [21]

Die Werte der Entwicklungskoeffizienten können wie erwähnt durch Simulationen und Experimente ermittelt werden. Zur Veranschaulichung der betreffenden Größenordnungen sind im Folgenden einige Ergebnisse angeben²⁰:

Parameter	Empirischer Wert	Quelle
F_0 [MeV]	87, 1	Mittelwert div. Exp.
$B_0 \hat{m}$ [GeV ²]	0, 0136	
L_1^r [10^{-3}]	0, 65 \pm	$\pi\pi$ -Streuung und $F \rightarrow \pi\pi l\nu$
L_2^r [10^{-3}]	1, 895 \pm	
L_3^r [10^{-3}]	-3, 06 \pm	
L_4^r [10^{-3}]	0 \pm	$N_c \rightarrow \infty$ Grenzwert
L_5^r [10^{-3}]	2, 3 \pm	F_K/F_π
L_6^r [10^{-3}]	0 \pm	$N_c \rightarrow \infty$ Grenzwert
L_7^r [10^{-3}]	-0, 4 \pm	η - η' Mischwinkel
L_8^r [10^{-3}]	1, 1 \pm	$M_K^2/M_\pi^2, L_5^r$
L_9^r [10^{-3}]	7, 1 \pm	Seltene π -Zerfälle
L_{10}^r [10^{-3}]	-5, 6 \pm	

Tabelle 3.4: Empirisch ermittelte Werte für die (renormierten) LECs [22,23] mit zugehöriger Quelle

²⁰ \hat{m} entspricht dabei dem arithmetischen Mittel der u- und d-Quarkmassen

4. Quantenchromodynamik auf dem Gitter

Berechnet man die Massen der Mesonenfelder in den verschiedenen Ordnungen der effektiven χ PT-Lagrangedichte (Gl. (3.63) u. (3.72)), sind diese stets durch Funktionen der Quarkmassen m_q und Entwicklungsparameter C_i gegeben

$$\begin{aligned} m_\phi^2 &= f(m_u, m_d, m_s, C_i) \\ &= A(C_i)f^{(1)}(m_u, m_d, m_s) + B(C_i)f^{(2)}(m_u^2, m_d^2, m_s^2) + \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

die sich in verschiedenen Ordnungen der Quarkmassen entwickeln lassen. Da diese Entwicklung durch die zugrunde liegende Theorie wohldefiniert ist, können die Mesonenmassen z.B. durch experimentell gegebene Werte für m_q und C_i hergeleitet und die Theorie so überprüft werden.

Wie bereits einleitend erwähnt, ist es i.A. üblich, QCD-Prozesse numerisch in *Monte-Carlo*-Algorithmen zu simulieren, da perturbative Ansätze aufgrund der Größenordnung der starken Kopplungskonstanten in vielen Fällen scheitern. Des Weiteren ermöglichen diese Simulationen die freie Wahl der Input-Parameter, die unter anderem durch die Quarkmassen gegeben sind. Somit kann bspw. die in Gl. (4.1) entwickelte Mesonenmasse für verschiedene Werte m_q bestimmt und somit die Entwicklungsparameter anhand von Fit-Funktionen $f^{(i)}$ ermittelt werden, deren generelle Form durch die zugrunde liegende χ PT vorgegeben ist.

4.1. Der Gitterformalismus

Berechnet man bspw. den Propagator der freien Dirac-Felder ψ und $\bar{\psi}$ im Pfad-Integral Formalismus zu

$$\langle 0 | \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \exp [iS [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}]] , \quad (4.2)$$

$$\text{mit} \quad Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp [iS [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}]] ,$$

$$\text{und} \quad S [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}] = \int d^3x dt \mathcal{L} [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}] ,$$

wird deutlich, dass das Integral in Gl. (4.2) eine infinitesimale Summation von Feldkonfigurationen $\mathcal{D}\psi$ und $\mathcal{D}\bar{\psi}$ ist, deren Summanden durch einen zugehörigen Exponential-Faktor verschiedene Gewichtungen erhalten [8]. Um diese Größe numerisch auswerten zu können, ist ein Gitterformalismus nötig, im Zuge dessen die Raum-Zeit durch ein 4-dimensionales hyperkubisches Gitter (s. Abb. 4.1) mit endlicher Gitterkonstanten a quantisiert wird, sodass die Feldkonfigurationen diskretisiert werden und somit das Pfadintegral in eine Summe übergeht. Des Weiteren kann gezeigt werden, dass die Einführung imaginärer Zeiten gemäß einer *Wick-Rotation*

$$x_0 \rightarrow -ix_4, \quad \text{sodass} \quad p_0 \rightarrow ip_4, \quad (4.3)$$

in der Gauß'schen Zahlenebene die Wirkung derart transformiert, dass der Exponential-Faktor des Pfadintegrals in Gl. (4.2) ein rein reelles Argument erhält [24]:

$$\exp [iS] \rightarrow \exp [-S^E] . \quad (4.4)$$

Insgesamt entspricht die zu berechnende Größe also einer diskreten Summe aus Feldkonfigurationen, deren Beiträge über die entsprechende negativ-exponentielle Wirkung in Euklidischer Darstellung gewichtet werden. Der relevante Wertebereich dieser Summe ist also beschränkt, sodass keine unendliche Summation nötig ist. Die korrespondierende Eukli-

dische Lagrangedichte \mathcal{L}^E unterliegt ebenfalls der Wick-Rotation, die sich im Fall von Dirac-Feldern durch die Transformation der γ -Matrizen äußert (s. App. B.2). Die QCD Lagrangedichte in der Minkowski-Metrik in Gl. (2.2) transformiert sich durch einen Vorzeichenwechsel also zu

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^E [q_f, \bar{q}_f, A_{a,\mu}] = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f \left(\sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E D_{\mu} + m_f \right) q_f + \frac{1}{4} G_{a,\mu\nu} G_{a,\mu\nu}, \quad (4.5)$$

$$\text{sodass} \quad S_{\text{QCD}}^E [q_f, \bar{q}_f, A_{a,\mu}] = \int d^3x dt \mathcal{L}_{\text{QCD}}^E. \quad (4.5a)$$

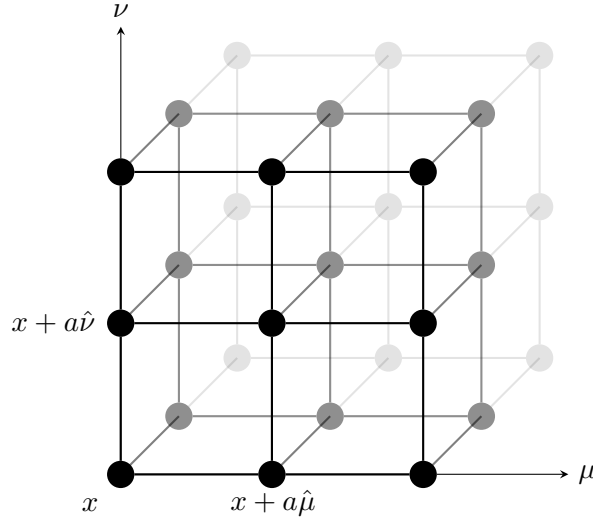


Abbildung 4.1: Schematische dreidimensionale Darstellung des Raum-Zeit-Gitters mit der Gitterkonstanten a und zwei ausgezeichneten Raum-Zeit-Richtungen μ und ν

4.2. Die Fermionen-Wirkung auf dem Gitter

Anschaulich sind die Felder in der Gittertheorie nicht mehr zwischen, sondern nur noch auf den Gitterpunkten x definiert. Die Eichbosonen sind im Gegensatz dazu als Vermittler der Wechselwirkung zwischen den Feldern ausschließlich auf die Verbindungslinien $a\hat{\mu}$ usw. (genannt: *Links*) reduziert.²¹ Da die Größe x_{μ} nun diskretisiert ist und einer Euklidischen Metrik unterliegt, folgt für die infinitesimalen Ableitungen ∂_{μ} und Integrale $\int d^4x$ eine Ersetzung durch finite Größen²² gemäß

$$\partial_{\mu} q_f(x) \rightarrow \Delta_{\mu}^{\pm} q_f(x) := \pm \frac{1}{a} (q_f(x \pm a\hat{\mu}) \mp q_f(x)), \quad (4.6a)$$

$$\int d^4x \rightarrow \sum_x a^4, \quad x \in \text{Gitter}. \quad (4.6b)$$

Des Weiteren werden die in der Kontinuumstheorie relevanten Größen mit der Gitterkonstanten reskaliert, sodass die Wirkung dimensionslos wird:

$$m_f \rightarrow \frac{1}{a} m_f, \quad (4.7a)$$

$$q_f(x) \rightarrow a^{-\frac{3}{2}} q_f(x), \quad (4.7b)$$

$$\bar{q}_f(x) \rightarrow a^{-\frac{3}{2}} \bar{q}_f(x). \quad (4.7c)$$

²¹ $\hat{\mu}$ ist dabei der Einheitsvektor in einer der vier Raum-Zeit-Richtungen

²² In Gl. (4.6) wird zwischen *Vorwärts-* und *Rückwärts-Differenzenquotienten* unterschieden - im Dirac-Operator werden diese zum *zentralen Differenzenquotienten* überlagert

Mit diesen Ersetzungen ergibt sich ausgehend vom fermionischen Anteil in Gl. (4.5) eine erste „naive“ Form der Fermionen-Wirkung auf dem Gitter:

$$S_F^{E,\text{naiv}} [q_f, \bar{q}_f] = \sum_x \bar{q}_f (\not{D} + m_f) q_f, \quad (4.8)$$

$$\text{mit} \quad \not{D} := \frac{1}{2} \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E (\Delta_{\mu}^+ + \Delta_{\mu}^-)). \quad (4.8a)$$

Die Definition der Wellenfunktion und des Dirac-Operators auf einem diskreten Gitter bringt weitergehend einige wichtige Konsequenzen mit sich. Betrachtet man die fourier-transformierte Wellenfunktion

$$\tilde{q}_f(p) = \sum_x a^4 \exp[-ipx] q_f(x), \quad (4.9)$$

wird deutlich, dass diese für diskrete Werte von x periodische Randbedingungen

$$p_{\mu} \cong p_{\mu} + \frac{2\pi}{a}, \quad (4.10)$$

im Impulsraum erhält und sich durch

$$-\frac{\pi}{a} < p_{\mu} < \frac{\pi}{a} \quad (4.11)$$

automatisch ein *Ultraviolett-Cutoff* ergibt [24]. Auf dem Gitter sind divergente Integrale, die im Kontinuum zu Unendlichkeiten führen, also auf natürliche Weise regularisiert. Eine weitere Konsequenz des Gitterformalismus' wird bei der Berechnung des freien Fermionen-Propagators in der naiven Wirkung erkennbar:

$$\tilde{\Delta}_F^{E,\text{naiv}}(p) = \frac{-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin(ap_{\mu}) + m_f}{\sum_{\mu} \sin^2(ap_{\mu}) + m_f^2}. \quad (4.12)$$

Dieser folgt aus dem korrespondierenden Propagator im Kontinuum im Wesentlichen durch die Ersetzung

$$p_{\mu} \rightarrow \sin(ap_{\mu}). \quad (4.13)$$

Damit ergeben sich im Limes $m_f \rightarrow 0$ neben der Polstelle $p_{\mu} = 0$ durch die Bedingung $p_{\mu} = \pm\pi/a$ zusätzlich insgesamt 15 weitere Polstellen, sodass effektiv 16 Fermionen beschrieben werden.

Der so beschriebene Effekt wird als *Fermion-Verdopplung* bezeichnet und ist nach dem *Nielsen-Ninomiya No-Go-Theorem* eine unvermeidliche Konsequenz für Gittertheorien mit erhaltener chiraler Symmetrie [25,26]. Man findet verschiedene Modifikationen der naiven Wirkung, um die Entstehung der zusätzlichen Fermionen auszugleichen. Unter Einführung von *Staggered Fermions* werden bspw. die verschiedenen Dirac-Komponenten der Felder anderen Raum-Zeit-Punkten zugeordnet, sodass sich die Anzahl der Fermionen von 16 auf 4 reduziert. Bei dieser Methode bleibt die chirale Symmetrie teilweise erhalten.

4.3. Die Wilson-Wirkung

Eine weitere Methode, bei der alle unphysikalischen Fermionen „verschwinden“, ist die Einführung eines *Wilson-Dirac-Operators* [24]. Der Dirac-Operator in Gl. (4.8a) wird dabei durch einen *Wilson-Term* erweitert, der im Kontinuums-limes $a \rightarrow 0$ verschwindet. Der Parameter $0 < r \leq 1$, der bei Simulationen im sog. Hopping-Parameter relevant wird, kann im Nachhinein für die relevanten Rechnungen o.B.d.A. zu 1 gewählt werden. Man

findet insgesamt

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_W = \frac{1}{2} \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E (\Delta_{\mu}^+ + \Delta_{\mu}^-) - ra \Delta_{\mu}^- \Delta_{\mu}^+), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \text{sodass} \quad S_F^{E,\text{naiv}} &\rightarrow S_F^{E,\text{naiv}} - \frac{ra}{2} \sum_x \bar{q}_f(x) \square q_f(x) \\ &= S_F^{E,\text{naiv}} - \frac{ra}{2} \sum_{x,\mu} \bar{q}_f(x) (q_f(x + a\hat{\mu}) + q_f(x - a\hat{\mu}) - 2q_f(x)), \quad (4.15) \\ &=: S_F^W. \end{aligned}$$

Berechnet man den zugehörigen Propagator, stellt man fest, dass die Massen der 15 unphysikalischen Fermionen nun impulsabhängig und gemäß

$$m_f \rightarrow m_f + \frac{2r}{a} \sum_{\mu} \sin^2(ap_{\mu}/2), \quad (4.16)$$

einen Beitrag proportional zu $1/a$ erhalten. Im Kontinuumslimit an den Polstellen $p_{\mu} \neq 0$ divergieren die Massen und verschwinden damit aus dem Spektrum.

Der so eingeführte zusätzliche Term in der *Wilson-Wirkung* bricht die chirale Symmetrie allerdings explizit:

$$\sum_x \frac{ra}{2} \bar{q}_f \square q_f = \sum_x \left(\frac{ra}{2} \bar{q}_{f,L} \square q_{f,R} + \frac{ra}{2} \bar{q}_{f,R} \square q_{f,L} \right), \quad (4.17)$$

sodass dieser unter chiraler Transformation ein zum Quarkmassenterm analoges Verhalten zeigt und bei der Berechnung der Mesonenmassen systematische Gitterfehler erzeugt.

Die vollständige Wirkung der QCD auf dem Gitter enthält des Weiteren einen Yang-Mills-Term, der sich unter Forderung der Eichinvarianz zu einem geschlossenen Pfad aus Verbindungslinien des Gitters ergibt (vgl. Abb. 4.1). Infinitesimal kann dieser durch eine *Plaquette* ausgedrückt werden, die einem zweidimensionalen Quadrat der Kantenlänge a im vierdimensionalen Gitter entspricht.

Der *Paralleltransporter* von einem Gitterpunkt x in Richtung μ zum nächstbenachbarten Punkt ist über die Eichfelder A_{μ}^b wie folgt definiert:

$$U_{x\mu} = U(x + a\hat{\mu}, x) := \exp \left[ig_s a A_{\mu}^b \frac{\lambda_b}{2} \right], \quad \text{mit} \quad U_{x\mu} \in \text{SU}(3). \quad (4.18)$$

Über diese Größe kann eine Plaquette p durch die Kombination

$$U(p) := U_{(x+a\hat{\nu})(-\nu)} U_{(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})(-\mu)} U_{(x+a\hat{\mu})(+\nu)} U_{(x)(+\mu)} \quad (4.19)$$

dargestellt werden, sodass sich der Yang-Mills-Term der Eichfelder auf dem Gitter nach [24] insgesamt zu

$$S_{\text{YM}}^W[U] = \frac{1}{g_s^2} \sum_p \langle 1 - U(p) \rangle \quad (4.20)$$

ergibt. Ersetzt man nun die Ableitungen (4.6a) im Wilson-Operator durch ihre eichinvariante Form gemäß

$$\Delta_{\mu}^+ q_f(x) \rightarrow +\frac{1}{a} \left(U_{x\mu} q_f(x + a\hat{\mu}) - q_f(x) \right) \quad (4.21a)$$

$$\text{und} \quad \Delta_{\mu}^- q_f(x) \rightarrow -\frac{1}{a} \left(U_{x\mu}^{\dagger} q_f(x - a\hat{\mu}) - q_f(x) \right), \quad (4.21b)$$

erhält man die Wilson-Wirkung der Quantenchromodynamik auf dem Gitter²³:

$$\begin{aligned} S_{\text{QCD}}^{\text{W}}[\bar{q}_f, q_f, U] &:= S_{\text{F}}^{\text{W}}[\bar{q}_f, q_f, U] + S_{\text{YM}}^{\text{W}}[U], \\ &= a^4 \sum_x \bar{q}_f (\not{D}_{\text{W}} + m_f) q_f + \frac{1}{g_s^2} \sum_p \langle 1 - U(p) \rangle. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.4. Die Symanzik-Wirkung in $\mathcal{O}(a)$

Durch die numerische Berechnung physikalischer Größen auf dem Gitter treten aufgrund der endlichen Gitterkonstanten systematische Fehler in verschiedenen Ordnungen von a auf. Da die Rechenzeit für kleinere Werte von a aufgrund der vierdimensionalen Abhängigkeit von dieser Konstanten stark ansteigt, ist es effizienter, die zugrunde liegende Lagrangedichte im Rahmen des *Symanzik-Improvement-Programme* durch Terme zu erweitern, die die Gitterfehler kompensieren:

$$S \rightarrow S + aS_1 + a^2S_2 + \dots \quad (4.23)$$

Dabei entspricht der Term S der durch die zugrunde liegende Theorie definierten Wirkung (z.B. Gl. 4.22). Die Wirkungen S_i müssen analog zur effektiven Theorie der Mesonen lediglich die geforderten Symmetrien erfüllen. Für eine Verbesserung in $\mathcal{O}(a)$ muss die zu S_1 korrespondierende Lagrangedichte \mathcal{L}_1 ermittelt werden. Aus Symmetriebetrachtungen erhält man fünf geeignete Terme²⁴ [27]:

$$\mathcal{O}_1 = \bar{q}_f \sigma_{\mu\nu}^{\text{E}} F_{\mu\nu} q_f, \quad (4.24a)$$

$$\mathcal{O}_2 = \bar{q}_f \vec{D}_{\mu} \vec{D}_{\mu} q_f + \bar{q}_f \overleftarrow{D}_{\mu} \overleftarrow{D}_{\mu} q_f, \quad (4.24b)$$

$$\mathcal{O}_3 = m_f \langle F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rangle, \quad (4.24c)$$

$$\mathcal{O}_4 = m_f \left(\bar{q}_f \gamma_{\mu}^{\text{E}} \vec{D}_{\mu} q_f - \bar{q}_f \overleftarrow{D}_{\mu} \gamma_{\mu}^{\text{E}} q_f \right), \quad (4.24d)$$

$$\mathcal{O}_5 = m_f^2 \bar{q}_f q_f. \quad (4.24e)$$

Dabei sind die Feldstärketensoren $F_{\mu\nu}$ über die Eichfelder der QCD definiert und der Tensor $\sigma_{\mu\nu}^{\text{E}}$ ergibt sich aus den γ -Matrizen (s. App. B.2).

Fasst man die Terme \mathcal{O}_3 und \mathcal{O}_5 als Beiträge zur Massenrenormierung auf und beschränkt sich auf die Treelevel Störungstheorie, sodass die Terme \mathcal{O}_2 und \mathcal{O}_4 durch klassische Bewegungsgleichungen eliminiert werden, ist \mathcal{L}_1 lediglich durch den *Pauli-Term* \mathcal{O}_1 gegeben. Die in $\mathcal{O}(a)$ verbesserte Wirkung ist nun insgesamt durch

$$S_{\text{QCD}}^{\text{impr}} = S_{\text{QCD}}^{\text{W}} + a^5 \sum_x c_{\text{sw}} \bar{q}_f \sigma_{\mu\nu}^{\text{E}} F_{\mu\nu} q_f, \quad (4.25)$$

mit dem *Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizienten* c_{sw} gegeben. Prinzipiell werden durch diese Verbesserung systematische Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ aufgehoben. In der praktischen Anwendung in Form von Gitter-Simulationen treten allerdings besonders für kleine Quarkmassen weiterhin Probleme auf [28]. Die Berechnung physikalischer Observablen kann aufgrund der Graßmann-Algebra der Fermionen-Felder immer auf die Berechnung der *Fermionen-Determinante* zurückgeführt werden (s. App. E). Diese nimmt in vielen Fällen sehr kleine Werte an, sodass es zu unphysikalischen *Quark Zero Modes* kommt. Die systematischen Fehler aufgrund des Gitters können also theoretisch behoben werden, die statistischen Fehler der Observablen durch die verschwindenden Eigenwerte der *Fermionen-Matrix* werden allerdings größer, sodass im Folgenden eine effizientere Methode eingeführt wird.

²³ Die Skalierung gemäß (4.7a/b/c) wurde in dieser Darstellung wieder fallen gelassen

²⁴ Dabei zeigen die Pfeile über den kovarianten Ableitungen die Richtung an in der sie wirken

4.5. Gitter-QCD mit Twisted-Mass

Grundlage für die Twisted-Mass-Formulierung ist die Erweiterung des Wilson-Dirac-Operators durch einen konstanten imaginären Term

$$\mathcal{D}_W \rightarrow \mathcal{D}_W + i\mu\gamma_5\lambda_3, \quad (4.26)$$

sodass die Determinante des neuen Operators und damit die Eigenwerte nach [29] gegen Quark Zero Modes geschützt sind (s. App. E.1). Betrachtet man die fermionische Wirkung

$$S_F^{\text{tw}} = a^4 \sum_x \bar{q}_f \left(\mathcal{D}_W + i\mu\gamma_5\lambda_3 + \tilde{M} \right) q_f \quad (4.27)$$

mit dieser Ersetzung, wird deutlich, dass es sich dabei um eine axiale Drehung der Massenmatrix im u-d-Sektor²⁵ handelt:

$$m_u \rightarrow \tilde{m} + i\gamma_5\mu = m (\cos(\omega) + i\gamma_5 \sin(\omega)) \quad (4.28)$$

$$\text{und} \quad m_d \rightarrow \tilde{m} - i\gamma_5\mu = m (\cos(\omega) - i\gamma_5 \sin(\omega)). \quad (4.29)$$

In Matrixschreibweise (vgl. Gl. 2.21a/b) erhält man dann mit der Definition von λ_3 für die Transformation:

$$M \rightarrow \exp \left[i\gamma_5\lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] M \exp \left[i\gamma_5\lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] \quad (4.30)$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{m} + i\gamma_5\mu & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m} - i\gamma_5\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Die physikalischen Massen

$$m = \sqrt{\tilde{m}^2 + \mu^2}, \quad (4.32)$$

$$m_s = m_s$$

bleiben folglich unter der axialen Drehung der Massenmatrix invariant. Diese kann im Übrigen auch in eine Transformation der Felder gemäß

$$q \rightarrow q^{\text{phys}} := \exp \left[i\gamma_5\lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] q, \quad (4.31a)$$

$$\bar{q} \rightarrow \bar{q}^{\text{phys}} := \bar{q} \exp \left[i\gamma_5\lambda_3 \frac{\omega}{2} \right], \quad (4.31b)$$

absorbiert werden, sodass die Wirkung (4.27) wieder in ihre physikalische Form übergeht:

$$S_F^{\text{phys}} = a^4 \sum_x \bar{q}^{\text{phys}} \left(\mathcal{D}'_W + M \right) q^{\text{phys}}, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \mathcal{D}'_W &= \frac{1}{2} \sum_{\mu} \exp \left[i\gamma_5\lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] \left(\gamma_{\mu}^E (\Delta_{\mu}^+ + \Delta_{\mu}^-) - ra\Delta_{\mu}^- \Delta_{\mu}^+ \right) \exp \left[i\gamma_5\lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\gamma_{\mu}^E (\Delta_{\mu}^+ + \Delta_{\mu}^-) - ra\Delta_{\mu}^- \Delta_{\mu}^+ \exp [i\gamma_5\lambda_3\omega] \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Diese Darstellung wird als *Physical-Basis* bezeichnet.

²⁵ Zunächst werden hier entartete up- und down-Massen angenommen: $m_u = m_d = m \Leftrightarrow \Delta m = 0$

Die Form

$$S_F^{\text{tw}} = a^4 \sum_x \bar{q}^{\text{tw}} (\not{D}_W + M') q^{\text{tw}}, \quad (4.36)$$

$$\text{mit } M' = \exp \left[i\gamma_5 \lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] M \exp \left[i\gamma_5 \lambda_3 \frac{\omega}{2} \right],$$

aus (4.27) und (4.22) stellt im Gegensatz dazu die *Twisted-Basis* dar.

4.6. Chirale Störungstheorie auf dem Gitter mit Twisted-Mass

Da die Mesonenmatrix durch die Gell-Mann-Matrizen parametrisiert wurde (s. Gl. 3.27) und in der effektiven Lagrangedichte lediglich Spuren auftreten, bietet es sich an, die Massenmatrix in Gl. (4.30) ebenfalls über diese auszudrücken. In der späteren Berechnung mit aufgehobener Massenentartung ist weitergehend eine Einführung des arithmetischen Mittels \hat{m} und der Differenz Δm der u- und d-Quarkmassen zweckmäßig, sodass

$$\begin{aligned} M &\rightarrow \hat{m} \mathbb{1} + (m_s - \hat{m}) \left(\frac{1}{3} \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right) + \frac{1}{2} \Delta m \lambda_1 \\ &= \begin{pmatrix} \hat{m} & \frac{1}{2} \Delta m & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta m & \hat{m} & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

eine geeignete Parametrisierung darstellt. Die Massendifferenz wurde hier bewusst orthogonal²⁶ zum Massentwist implementiert, um die Positivität der Fermionen-Determinante nach [30,31,32] zu gewährleisten. Die Transformation (4.30) geht damit über in

$$\exp \left[i\gamma_5 \lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] M \exp \left[i\gamma_5 \lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] = \begin{pmatrix} \tilde{m} + i\gamma_5 \mu & \frac{1}{2} \Delta m & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta m & \tilde{m} - i\gamma_5 \mu & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

$$\text{mit } \mu = \hat{m} \sin(\omega), \quad \tilde{m} = \hat{m} \cos(\omega), \quad \omega = \arctan \left(\frac{\mu}{\tilde{m}} \right), \quad (4.38a)$$

sodass die physikalischen Massen auch in dieser Darstellung invariant bleiben. Die Transformation entspricht also einfach formuliert einer Drehung des u-d-Mittels \hat{m} in der Zahlenebene zu komplexen Werten mit invariantem Betrag (s. Abb. 4.2).

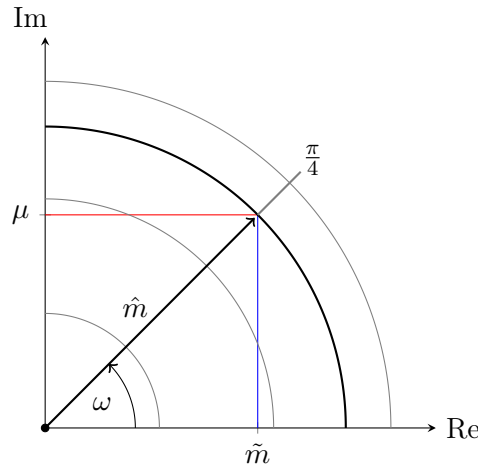


Abbildung 4.2: Polare Darstellung der Massendrehung in der komplexen Zahlenebene für $\omega = \frac{\pi}{4}$

²⁶ Weitergehend ist ein Twist via λ_8 möglich, der allerdings identische physikalische Endergebnisse liefert

Die zwei ausgezeichneten Twist-Winkel $\omega_0 = 0$ und $\omega_F = \frac{\pi}{2}$ werden als *Zero-Twist* und *Full-Twist* bezeichnet bei denen die Quarkmassenterme im u-d-Sektor vollständig reelle bzw. vollständig imaginäre Werte annehmen. Es kann gezeigt werden, dass die Wahl eines Full-Twists Gitterkorrekturen $\mathcal{O}(a)$ in vielen Observablen per *Wilson-Mittelung* automatisch eliminiert (s. App. F), sodass ein rein imaginärer Quarkmassenterm unter anderem für die spätere Bestimmung der Mesonenmassen eine attraktive Wahl darstellt. Die quantitative Auswirkung auf mögliche Simulationen wird in Kap. 5 nähergehend untersucht.

Betrachtet man die Massenterme der effektiven Lagrangedichte (Gl. (3.63) u. (3.72)), die das Spurion χ enthalten, finden sich drei Arten von Ausdrücken:

$$\langle U\chi^\dagger \rangle, \quad \langle U\chi^\dagger U\chi^\dagger \rangle \quad \text{und} \quad \langle \chi\chi^\dagger \rangle. \quad (4.39)$$

Der dritte Ausdruck ist, aufgrund der Proportionalität zwischen χ und M , unter der Twist-Transformation gemäß (4.38) invariant. Weitergehend gilt mit der Zyklizität der Spur für die ersten beiden Terme

$$\begin{aligned} \langle U\chi^\dagger \rangle &\rightarrow \langle U \exp[-i\lambda_3\omega] \chi^\dagger \rangle \\ &= \langle U \exp\left[-i\lambda_3\frac{\omega}{2}\right] \chi^\dagger \exp\left[-i\lambda_3\frac{\omega}{2}\right] \rangle \\ &= \langle \exp\left[-i\lambda_3\frac{\omega}{2}\right] U \exp\left[-i\lambda_3\frac{\omega}{2}\right] \chi^\dagger \rangle \\ &:= \langle U'\chi^\dagger \rangle \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\text{und analog} \quad \langle U\chi^\dagger U\chi^\dagger \rangle \rightarrow \langle U'\chi^\dagger U'\chi^\dagger \rangle. \quad (4.41)$$

Der Massen-Twist des Spurions kann also in eine Transformation der Feldmatrix absorbiert werden. Dies entspricht dem in Gl. (4.34) beschriebenen Übergang in die *Physical-Basis*. Des Weiteren stellt die so beschriebene Transformation

$$U \rightarrow U' = \exp\left[-i\lambda_3\frac{\omega}{2}\right] U \exp\left[-i\lambda_3\frac{\omega}{2}\right] := RUL^\dagger \quad (4.42)$$

eine Untergruppe der chiralen Transformationsgruppe $SU(3)_R \times SU(3)_L$ dar, unter der die effektive Lagrangedichte nach Konstruktion invariant bleibt, sodass die in Kap. 3 hergeleitete effektive Quantenfeldtheorie und insbesondere die zu ermittelnden Mesonenmassen im Kontinuum unabhängig vom Twist-Winkel sind.

Das Spurion χ wurde in die Theorie eingebettet, um die chirale Symmetrie beim Übergang zu einer konstanten Massenmatrix explizit zu brechen und somit die endlichen Mesonenmassen zu erzeugen. In Kap. 4.3 wurde weitergehend gezeigt, dass der zur Gitterkonstanten a proportionale Zusatzterm des Wilson-Dirac-Operator eine analoge Brechung dieser Symmetrie hervorruft. Es liegt also nahe, diesen ebenfalls mit Hilfe der Spurionanalyse über eine Matrix ρ in die Lagrangedichte einzubetten, die den gleichen Transformationseigenschaften wie χ unterliegt (s. Tab. 3.2). In führender Ordnung ergibt sich analog zu Kap. 3.5.1 ein symmetriebrechender Term

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{sb}}^\# &= -\frac{F_0^2}{4} \langle U\rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle, \\ \text{mit} \quad \rho &= \rho_0 \mathbb{1} := 2W_0 a \mathbb{1}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

der zunächst den Symmetrieforderungen der effektiven Theorie genügt und bei Berechnung physikalischer Größen eine explizit symmetriebrechende Rolle einnimmt. Dabei ist W_0 ein neuer zu F_0 analoger Parameter. Zusätzlich zur bekannten Methodik sind bei der Konstruktion der relevanten Terme auf dem Gitter einige Vorzeichenwechsel zu beachten, die durch die Wick-Rotation (s. Gl. (4.3)) hervorgerufen werden.

Ausgehend von Gl. (3.63) ergibt sich nach [33] damit die effektive Lagrangedichte mit

dem symmetriebrechenden Gitterterm in führender Ordnung zu:

$$\mathcal{L}_{\text{LO}}^{\#} \hat{=} \mathcal{L}_2^{\#} = \frac{F_0^2}{4} \langle \text{D}_\mu U (\text{D}_\mu U)^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle \quad (4.44)$$

Diese geht für $a \rightarrow 0$ unter Berücksichtigung des erwähnten Vorzeichenwechsels in die effektive Lagrangedichte der χ PT im Kontinuum über, sodass Gitterartefakte in Kontinuumsgrößen in der analytischen Rechnung leicht identifiziert werden können. Die Lagrangedichte nächstführender Ordnung folgt aus analogen Symmetriebetrachtungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO}}^{\#} &\hat{=} \mathcal{L}_2^{\#} + \mathcal{L}_4^{\#}, \\ \text{mit } \mathcal{L}_4^{\#} &= -L_1 \langle \text{D}_\mu U (\text{D}_\mu U)^\dagger \rangle^2 - L_2 \langle \text{D}_\mu U (\text{D}_\nu U)^\dagger \rangle^2 - L_3 \langle (\text{D}_\mu U (\text{D}_\mu U)^\dagger)^2 \rangle \\ &\quad + L_4 \langle \text{D}_\mu U (\text{D}_\mu U)^\dagger \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle + W_4 \langle \text{D}_\mu U (\text{D}_\mu U)^\dagger \rangle \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle \\ &\quad + L_5 \langle \text{D}_\mu U (\text{D}_\mu U)^\dagger \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle + W_5 \langle \text{D}_\mu U (\text{D}_\mu U)^\dagger \rangle \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle \\ &\quad - L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 - W_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle \\ &\quad - L_7 \langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle^2 - W_7 \langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle \langle U \rho^\dagger - \rho U^\dagger \rangle \\ &\quad - L_8 \langle U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \rangle - W_8 \langle U \rho^\dagger U \chi^\dagger + \rho U^\dagger \chi U^\dagger \rangle \\ &\quad - W'_6 \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle^2 - W'_7 \langle U \rho^\dagger - \rho U^\dagger \rangle^2 - W'_8 \langle U \rho^\dagger U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rho U^\dagger \rangle \\ &\quad - iL_9 \langle f_{\mu\nu}^{\text{R}} \text{D}_\mu U (\text{D}_\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^{\text{L}} (\text{D}_\mu U)^\dagger \text{D}_\nu U \rangle + L_{10} \langle U f_{\mu\nu}^{\text{L}} U^\dagger f_{\mu\nu}^{\text{R}} \rangle \\ &\quad + H_1 \langle f_{\mu\nu}^{\text{R}} f_{\mu\nu}^{\text{R}} \rangle - H_2 \langle \chi \chi^\dagger \rangle - H'_2 \langle \rho \rho^\dagger \rangle \end{aligned} \quad (4.45)$$

Auch diese Größe geht im Kontinuumslimit in die Lagrangedichte der herkömmlichen χ PT über. Des Weiteren wurden neue Koeffizienten W_i definiert, die in ungestrichener Notation Terme $\mathcal{O}(a)$ bzw. in gestrichener Notation Terme $\mathcal{O}(a^2)$ anführen.

In der Physical-Basis besitzt das Spurion χ eine vom Twist-Winkel unabhängige Gestalt, die Gittergröße ρ hängt darüber hinaus, wie in Gl. (4.35) erkennbar, über den Wilson-Term von ω ab und transformiert wie folgt:

$$\rho \rightarrow \rho(\omega) = \exp \left[i \lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] \rho \exp \left[i \lambda_3 \frac{\omega}{2} \right] \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \tilde{\rho} + i\rho_3 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\rho} - i\rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \lambda_8 + i\gamma_5 \rho_3 \lambda_3, \end{aligned} \quad (4.46a)$$

$$\text{mit } \tilde{\rho} = \rho_0 \cos(\omega) \quad \text{und} \quad \rho_3 = \rho_0 \sin(\omega). \quad (4.46b)$$

Da im Folgenden ausschließlich in der Physical-Basis gearbeitet wird, wird auf die gestrichene Notation der Feldmatrix gemäß (4.42) sowie auf die explizite Angabe der Twist-Winkelabhängigkeit des Gitter-Spurions entsprechend (4.46) verzichtet.

5. Berechnung physikalischer Größen im Rahmen der Twisted-Mass χ PT

In diesem Kapitel werden die zuvor konstruierten Lagrangedichten führender und nächstführender Ordnung verwandt, um physikalische Größen der pseudoskalaren Mesonen zu extrahieren und analysieren. Besonderes Augenmerk soll dabei auf der Berechnung der Mesonenmassen und den durch die Raum-Zeit-Quantisierung aufgetretenden Fehler-Termen sowie der möglichen Kompensation durch den Twisted-Mass-Formalismus liegen.

Zur Berechnung der Massen allgemeiner Felder im Kontinuum ist üblicherweise eine Bestimmung der lokalen Krümmung der Lagrangedichte im Ursprung von Nöten. Die exponentielle Parametrisierung der relevanten Feldfreiheitsgrade ϕ_a in Gl. (3.29) erfordert im Gegensatz zur klassischen Form, die z.B. exemplarisch in Kap. 3.4.1 verwandt wird, eine Entwicklung der Lagrangedichte in Ordnungen von ϕ_a , um die gesuchte Krümmung zu ermitteln. Eine Expansion des symmetriebrechenden Terms bis hin zur Ordnung $\mathcal{O}(\phi_a^2)$ bzw. eine Bestimmung der sog. *Hesse-Matrix* liefert eine verhältnismäßig einfache Beschreibung der lokalen Krümmung und damit eine diagonalisierbare Massenmatrix für die Treelevel-Massen, die durch übliche Schleifenkorrekturen in nächstführenden Ordnungen erweitert werden können.

Im Rahmen der QCD auf dem Gitter kann diese Methodik aufgrund der Analogie zwischen Massen- und Gittertermen in gleicher Weise angewandt und zusätzlich auftretende Gitterartefakte können quantifiziert werden. Der zur Kompensation dieser Artefakte angewandte Twisted-Mass-Formalismus in der Physical-Basis führt mit dem Twist-Winkel ω eine neue Variable ein, sodass sowohl die Gitterterme, als auch deren Abhängigkeit vom Twist-Winkel analysiert werden können.

5.1. Mesonenmassen führender Ordnung

Im Folgenden wird zunächst gezeigt, dass der Twisted-Mass-Formalismus eine Verschiebung des Minimums der Lagrangedichte aus dem Ursprung hervorruft. Am Beispiel der Mesonenmassen führender Ordnung wird daraufhin der erwähnte störungstheoretische Ansatz im Bezug auf ein von Null verschiedenes Minimum skizziert und auf mögliche Problematiken untersucht.

5.1.1. Verschiebung des Minimums und störungstheoretischer Ansatz

Die effektive Lagrangedichte führender Ordnung (Gl. 4.44) lässt sich analog zu Kap. 3.5.1 in einen derivativen und einen symmetriebrechenden Term unterteilen²⁷:

$$\mathcal{L}_{\text{LO}} = \underbrace{\frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle}_{:= \mathcal{L}_{\text{LO,der}}} - \underbrace{\frac{F_0^2}{4} \langle (\chi + \rho) U^\dagger + U (\chi^\dagger + \rho^\dagger) \rangle}_{:= \mathcal{L}_{\text{LO,sb}}}. \quad (5.1)$$

Durch die Parametrisierungen der Spurionen (vgl. Gl. (3.56), (4.37) u. (4.46a)) über Gell-Mann-Matrizen gemäß

$$\rho = \frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \lambda_8 + i\rho_3 \lambda_3 \quad (5.2)$$

$$\text{und} \quad \chi = \frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \lambda_8 + \Delta\chi \lambda_1, \quad (5.3)$$

$$\text{mit} \quad \hat{\chi} := 2B_0\hat{m}, \quad \chi_s := 2B_0m_s \quad \text{und} \quad \Delta\chi := B_0\Delta m \quad (5.3a)$$

²⁷ Da die folgenden Rechnungen, falls nicht anders angegeben, stets auf effektiven Lagrangedichten inklusive der gefundenen Gitterterme basieren, wird die explizite Gitternotation (#) fallen gelassen

kann der symmetriebrechende Term, der nach Brechung die endlichen Massen der Pseudo-Goldstone-Bosonen erzeugt, nach kurzer Rechnung in folgende Gestalt gebracht werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{LO, sb}} = & -\frac{F_0^2}{12} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \langle U + U^\dagger \rangle + \frac{F_0^2}{4\sqrt{3}} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \langle [U + U^\dagger] \lambda_8 \rangle \\ & - \frac{F_0^2}{4} \Delta\chi \langle [U + U^\dagger] \lambda_1 \rangle + \frac{iF_0^2}{4} \rho_3 \langle [U - U^\dagger] \lambda_3 \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Durch das gepaarte Auftreten der Feldmatrix U und ihrer adjungierten Form wird anhand der Entwicklung²⁸

$$U^{(1)} = \mathbb{1} + \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \quad (5.5a)$$

$$\text{bzw.} \quad U^{\dagger, (1)} = \mathbb{1} - \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \quad (5.5b)$$

deutlich, dass lineare Feldterme ausschließlich durch den Twist-Term proportional zu ρ_3 induziert werden und damit eine Verschiebung des Minimums der Lagrangedichte in ϕ_3 -Richtung aus dem Ursprung $\Phi = 0$ heraus auftritt.

Setzt man die Entwicklung der Feldmatrix²⁹ bis einschl. $\mathcal{O}(\phi_a^2)$ in Gl. (5.4) ein, ergibt sich nach Rg. (I):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{LO, sb}}^{(2)} = & \frac{1}{2} (\hat{\chi} + \tilde{\rho}) \vec{\pi}^2 + \frac{1}{4} (\hat{\chi} + \tilde{\rho} + \chi_s + \rho_0) \vec{K}^2 + \frac{1}{6} (\hat{\chi} + \tilde{\rho} + 2(\chi_s + \rho_0)) \eta_8^2 \\ & + \frac{1}{2} \Delta\chi (K_4 K_6 + K_5 K_7) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi \pi_1 \eta_8 - F_0 \rho_3 \pi_3 + \text{const.} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Damit kann die Position $\check{\Phi}$ des Minimums durch partielle Ableitungen wie folgt bestimmt werden:

$$\check{\phi}_i = 0, \quad \text{für} \quad i \neq 3 \quad (5.7a)$$

$$\text{und} \quad \check{\phi}_3 = \frac{F_0 \rho_3}{\hat{\chi} + \tilde{\rho}}. \quad (5.7b)$$

Unter Annahme einer fest definierten Hierarchie gemäß

$$1 \gg \left\{ \frac{m_q}{\Lambda}, \frac{a}{\Lambda} \right\} \gg \left\{ \frac{m_q^2}{\Lambda^2}, \frac{a^2}{\Lambda^2}, \frac{am_q}{\Lambda^2} \right\} \quad \text{und} \quad \frac{\hat{\chi}}{\Lambda^2} \gg \frac{\rho_0}{\Lambda^2} \quad (5.8)$$

der relevanten Massen- und Gitterskalen, kann die Verschiebung

$$\phi'_a = \phi_a + \check{\phi}_a \quad (5.9)$$

i.A. als Funktion der Gitterkonstanten a durch

$$\check{\phi}_a = \Lambda_{a,1} a + \Lambda_{a,2} a^2 + \mathcal{O}(a^3) \quad (5.10)$$

entwickelt werden, sodass für das Minimum auf der ϕ_3 -Achse gilt:

$$\check{\phi}_3 = F_0 \frac{\rho_3 (\hat{\chi} - \tilde{\rho})}{\hat{\chi}^2} + \mathcal{O}(a^3) = F_0 \left[\frac{\rho_0}{\hat{\chi}} \sin(\omega) - \frac{\rho_0^2}{\hat{\chi}^2} \sin(\omega) \cos(\omega) \right] + \mathcal{O}(a^3). \quad (5.11)$$

²⁸ Die Notation ⁽¹⁾, ⁽²⁾, ... kennzeichnet eine Entwicklung bis zur linearen, bilinearen, ... Ordnung

²⁹ Die hier verwandte Parametrisierung unterscheidet sich aufgrund der unterschiedlichen Implementierung der Quarkmassen durch die Ersetzung $\pi_1 \leftrightarrow \pi_3$ von der in Kap. 3.3 erwähnten Gestalt

5.1.2. Krümmung der Lagrangedichte und Berechnung der Massen

Zur Bestimmung der Massenmatrix in führender Ordnung und den damit verbundenen Mesonenmassen wird der symmetriebrechende Term der Lagrangedichte um das verschobene Minimum bis zur quadratischen Ordnung entwickelt³⁰:

$$\check{\mathcal{L}}_{\text{LO, sb}} = \text{const.} + \sum_{i=a}^8 \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{LO, sb}}}{\partial \phi_i} \Big|_{\Phi=\check{\Phi}}}_{=0} \phi_a + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^8 \underbrace{\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{LO, sb}}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \Big|_{\Phi=\check{\Phi}}}_{:=H_{ab}} \phi_a \phi_b + \mathcal{O}(\text{WW}). \quad (5.12)$$

Die Hesse-Matrix H_{ab} gibt die Krümmung im Minimum an. Aufgrund der Verschiebung der Feldkoordinaten um $\check{\phi}_3$ erhält der derivative Term an der Stelle des Minimums einen zusätzlichen multiplikativen Faktor Z_a , sodass

$$\check{\mathcal{L}}_{\text{LO}} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 Z_a (\partial_\mu \phi_a)^2 + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^8 H_{ab} \phi_a \phi_b + \mathcal{O}(\text{WW}). \quad (5.13)$$

Durch Renormierung der Felder kann dieser kompensiert und der Propagationsterm auf die übliche physikalische Gestalt gebracht werden:

$$\phi_a \rightarrow Z_a^{-\frac{1}{2}} \phi_a \quad (5.14)$$

$$\Rightarrow \check{\mathcal{L}}_{\text{LO}} \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^8 \left[(\partial_\mu \phi_a)^2 + (Z_a Z_b)^{-\frac{1}{2}} H_{ab} \phi_a \phi_b \right] + \text{const.} + \mathcal{O}(\text{WW}). \quad (5.15)$$

Die zu diagonalisierende Massenmatrix \mathfrak{M}_{ab} ist schlussendlich durch die renormierte Hesse-Matrix

$$\mathfrak{M}_{ab} := (Z_a Z_b)^{-\frac{1}{2}} H_{ab} \quad (5.16)$$

gegeben. Zur Ermittlung der Renormierungskonstanten wird der derivative Term aus Gl. (5.1) unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\mathcal{O}(a^3)$ entwickelt (s. Rg. (II))

$$\check{\mathcal{L}}_{\text{LO, der}} = \frac{1}{2} \left[\sum_{a=1}^2 (\partial_\mu \pi_a)^2 \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{3F_0^2} \right] + \sum_{a=4}^7 (\partial_\mu K_a)^2 \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{12F_0^2} \right] + (\partial_\mu \pi_3)^2 + (\partial_\mu \eta_8)^2 \right], \quad (5.17)$$

sodass sich die Werte für Z_a direkt zu

$$Z_a = \begin{cases} 1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{3F_0^2} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = 1, 2 \\ 1 + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = 3, 8 \\ 1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{12F_0^2} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = 4, \dots, 7 \end{cases} \quad (5.19)$$

ablesen lassen. Die Renormierung ist also in Richtung ϕ_3 des zuvor definierten Massen-Twists und in ϕ_8 hinfällig. Die Massenmatrix führender Ordnung

$$\mathfrak{M}_{ab} = (Z_a Z_b)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{LO, sb}}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \Big|_{\Phi=\check{\Phi}} \quad (5.20)$$

³⁰ Die Notation $\mathcal{O}(\text{WW})$ deutet die Zusammenfassung trilinearere und höherer Wechselwirkungsterme an, die für Berechnungen führender Ordnung auf Treelevel nicht zum Tragen kommen

berechnet sich gemäß Rg. (III) nach Einsetzen der Renormierungskonstanten insgesamt zu

$$\mathfrak{M}_{ab} = \begin{cases} \hat{\chi} + \tilde{\rho} + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 1, 2, 3 \\ \frac{1}{2} \left[\hat{\chi} + \tilde{\rho} + \chi_s + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right] + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 4, 5, 6, 7 \\ \frac{1}{3} \left[\hat{\chi} + \tilde{\rho} + 2(\chi_s + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right] + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 8 \\ \frac{1}{2} \Delta\chi + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } ab = 57, 75, 46, 64 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } ab = 18, 81. \end{cases} \quad (5.21)$$

Es wird erkennbar, dass zum einen im Kaonen- und zum anderen im π^0 - η -Sektor nichtdiagonale Elemente und somit Mischungen auftreten. Im Folgenden werden die betreffenden Matrixblöcke diagonalisiert, um die zugehörigen Eigenwerte und Mesonenmassen sowie die Mischungsmatrizen und -winkel zu bestimmen.

Die Teilmatrix der Kaonen ist unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\mathcal{O}(a^3)$ explizit durch

$$\mathfrak{M}^{(K)} = \begin{pmatrix} \bar{m}_K^2 & 0 & \frac{1}{2} \Delta\chi & 0 \\ 0 & \bar{m}_K^2 & 0 & \frac{1}{2} \Delta\chi \\ \frac{1}{2} \Delta\chi & 0 & \bar{m}_K^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta\chi & 0 & \bar{m}_K^2 \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\text{mit } \bar{m}_K^2 := \frac{1}{2} \left[\hat{\chi} + \tilde{\rho} + \chi_s + \rho_0 + \frac{2\rho_3^2}{\hat{\chi}} \right] \quad (5.23)$$

gegeben³¹. Aufgrund der einfachen Form dieses Matrixblocks in der K_4 - K_6 - bzw. K_5 - K_7 -Ebene können die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \bar{m}_K^2 - \frac{1}{2} \Delta\chi \quad \text{und} \quad \lambda_{3,4} = \bar{m}_K^2 + \frac{1}{2} \Delta\chi. \quad (5.24)$$

direkt abgelesen werden. Die Transformation des Kaonen-Feldvektors in die Masseneigenbasis entspricht einer Drehung um jeweils $\frac{\pi}{4}$ in den entsprechenden Ebenen:

$$\begin{pmatrix} K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \end{pmatrix}_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} K_4 + K_6 \\ K_5 + K_7 \\ -K_4 + K_6 \\ -K_5 + K_7 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Der π^0 - η -Sektor der Massenmatrix ist durch folgenden 2×2 -Block gegeben:

$$\mathfrak{M}^{(\pi\eta)} = \begin{pmatrix} \bar{m}_\pi^2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi & \bar{m}_\eta^2 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\text{mit } \bar{m}_\pi^2 = \hat{\chi} + \tilde{\rho} + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \quad \text{und} \quad \bar{m}_\eta^2 = \frac{1}{3} \left[\hat{\chi} + \tilde{\rho} + 2(\chi_s + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right]. \quad (5.27)$$

³¹ Die Angabe der Entwicklungsordnung wird bei den Zwischenergebnissen fallen gelassen und erst bei Vorstellung der physikalischen Endergebnisse wieder aufgenommen

Für die Berechnung der zugehörigen Eigenwerte bzw. Mesonenmassen werden die auftretenden Funktionen sowohl in der Gitterkonstanten a , als auch in der Massendifferenz $\Delta m \sim \Delta\chi$ entwickelt. Die entsprechenden Eigenwerte ergeben sich nach Rg. (IV) wie folgt:

$$\lambda_1 = \bar{m}_\pi^2 - \frac{1}{2}\Delta_{\pi\eta} + \mathcal{O}(\Delta\chi^4) \quad (5.28)$$

$$\text{und} \quad \lambda_2 = \bar{m}_\eta^2 + \frac{1}{2}\Delta_{\pi\eta} + \mathcal{O}(\Delta\chi^4), \quad (5.29)$$

$$\text{mit} \quad \Delta_{\pi\eta} = \frac{\Delta\chi^2}{\chi_s - \hat{\chi}} \left[1 - \frac{\rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}}}{\chi_s - \hat{\chi}} + \frac{(\rho_0 - \tilde{\rho})^2}{(\chi_s - \hat{\chi})^2} \right]. \quad (5.30)$$

Die Transformation zur Masseneigenbasis ist von der Form

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix}_M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\pi\eta}) & \sin(\theta_{\pi\eta}) \\ -\sin(\theta_{\pi\eta}) & \cos(\theta_{\pi\eta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

mit dem Mischungswinkel

$$\theta_{\pi\eta} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}\Delta\chi}{\chi_s - \hat{\chi}} \right) - \frac{\sqrt{3}\Delta\chi(\rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}})}{6\Delta\chi^2 + 2(\chi_s - \hat{\chi})^2} + \frac{\sqrt{3}\Delta\chi(\chi_s - \hat{\chi})(\rho_0 - \tilde{\rho})^2}{2[\Delta\chi^2 + (\chi_s - \hat{\chi})^2]^2}. \quad (5.32)$$

Aus der nun vollständig diagonalisierten Massenmatrix können die Mesonenmassen führender Ordnung nach Einsetzen von (4.46b) und (5.3a) bis einschl. zur Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ in der Gitterkonstanten bzw. $\mathcal{O}(\Delta m^3)$ in der u-d-Massendifferenz wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} m_{\pi_1}^2 &= B_0(m_u + m_d) + 2aW_0 \cos(\omega) + \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \\ &\quad - \frac{1}{2}\Delta_{\pi\eta} + \mathcal{O}(\Delta m^4, a^3) \\ m_{\pi_2, \pi_3}^2 &= B_0(m_u + m_d) + 2aW_0 \cos(\omega) + \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} + \mathcal{O}(a^3) \\ m_{K_4, K_5}^2 &= B_0(m_u + m_s) + aW_0(1 + \cos(\omega)) + \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} + \mathcal{O}(a^3) \\ m_{K_6, K_7}^2 &= B_0(m_d + m_s) + aW_0(1 + \cos(\omega)) + \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} + \mathcal{O}(a^3) \\ m_{\eta_8}^2 &= \frac{1}{3} \left[B_0(m_u + m_d + 4m_s) + 2aW_0(2 + \cos(\omega)) + \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta_{\pi\eta} + \mathcal{O}(\Delta m^4, a^3) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Dabei ist die π^0 - η -Massenkorrektur in der betreffenden Entwicklung explizit durch

$$\Delta_{\pi\eta} = \frac{B_0(m_d - m_u)^2}{2m_s - m_u - m_d} \left[1 - \frac{2aW_0(1 - \cos(\omega)) - \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)}}{B_0(2m_s - m_u - m_d)} + \frac{4a^2W_0^2(1 - \cos(\omega))^2}{B_0^2(2m_s - m_u - m_d)^2} \right] \quad (5.34)$$

gegeben und damit von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m^2)$.

Im Kontinuumsimes $a \rightarrow 0$ sind die Massen der geladenen Pionen, die sich in der gegebenen Parametrisierung (4.37) aus den Feldern π_2 und π_3 zusammensetzen, entartet. Auch die geladenen Kaonen, die sich aus K_4 und K_5 zusammensetzen, sowie die neutralen Kaonen, die durch Linearkombinationen von K_6 und K_7 gegeben sind, sind jeweils massenentartet. Die Differenz der Kaonenmassen ist in dieser Ordnung durch die Massendifferenz der zwei leichten Quarks gegeben (vgl. Gl. (5.24)). Das neutrale Pion π_1 besitzt gegenüber den geladenen eine durch die Mischung mit dem η -Meson leicht reduzierte Masse. Die Massenaufspaltung ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m^2)$, der π^0 - η -Mischungswinkel nimmt für die Quarkmassen aus Tab. 2.1 sehr kleine Werte in der Größenordnung $\theta_{\pi\eta} \approx 0,5^\circ - 1,0^\circ$ an. Die Mesonenmassen \bar{m}_{ϕ_a} erfüllen im Grenzfall verschwindender u-d-Massendifferenz automatisch die *Gell-Mann-Okubo-Relation* (vgl. [19])

$$4\bar{m}_K^2 = 3\bar{m}_\eta^2 + \bar{m}_\pi^2. \quad (5.35)$$

Dies gilt sowohl im Kontinuumsimes, als auch für eine nichtverschwindende Gitterkonstante. Ebenfalls unabhängig vom Entwicklungskoeffizienten B_0 lässt sich eine Relation der Quarkmassen zueinander gewinnen:

$$\frac{\bar{m}_K^2}{\bar{m}_\pi^2} \rightarrow \frac{m_{u,d} + m_s}{2m_{u,d}}, \quad \text{für } a \rightarrow 0. \quad (5.36)$$

Die physikalischen Ergebnisse im Kontinuum stimmen qualitativ mit den bekannten Relationen und den Mesonenmassen des Oktetts (s. Abb. 3.5) überein. Die Abhängigkeiten von den Quarkmassen spiegeln des Weiteren den Quarkinhalt der Mesonen wider.

Für eine nichtverschwindende Raumzeitdiskretisierung erhalten die physikalischen Massen, wie erwartet, Gitterartefakte in verschiedenen Ordnungen von a abhängig vom Twist-Winkel. Die automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung für Full-Twist $\omega = \omega_F = \frac{\pi}{2}$ kann lediglich für die geladenen Pionen festgestellt werden. Sowohl die Kaonen, als auch das η -Meson weisen nichtverschwindende Gitterfehler auf. Auch die Masse des neutralen Pions kann aufgrund der π^0 - η -Mischung nicht $\mathcal{O}(a)$ -verbessert werden - die verbleibenden Fehlerterme sind allerdings aufgrund der schwachen Mischung sehr klein.

5.1.3. Optimierte Feld-Parametrisierung

Zur Berechnung der nächstführenden Ordnung wird im späteren Verlauf ein zu Kap. 5.1.1 ff. ähnliches Verfahren auf die Lagrangedichte in Gl. (4.45) angewandt, um durch Bestimmung von Minimum und Krümmung Ausdrücke für die neuen Treelevel-Massen der Mesonen zu erhalten. Zusätzlich tragen Schleifenbeiträge (vgl. Tab. 3.1) und die daraus resultierende Selbstenergie zur physikalischen Masse bei. Durch die Verschiebung des Minimums treten neben den symmetrischen 4-Vertices auch 3-Vertices auf, die zunächst symmetrisiert werden müssen, sodass sich der Rechenaufwand im Vergleich zur Kontinuumstheorie unverhältnismäßig vergrößert (vgl. [34]).

Ein möglicher Ansatz, diesen Aufwand zu minimieren, ist eine Kompensation der Verschiebung (Gl. (5.9)) in die exponentielle Parametrisierung der Felder, sodass

$$U' := \exp \left[\frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi'_a \right] = \exp \left[\frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a + \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \check{\phi}_a \right] \quad (5.37)$$

die verschobene Feldmatrix darstellt und das Minimum der entsprechenden Lagrangedichte wie gewohnt im Ursprung liegt. Diese lineare Transformation des exponentiellen Arguments geht unter Berücksichtigung der *Baker-Campbell-Hausdorff-Reihe* (BCH)

$$\exp[A] \exp[B] = \exp \left[A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots \right] \quad (5.38)$$

in eine nichttriviale Transformation der exponentiellen Feldkonfigurationsmatrix U über [35]. Um die Verschiebung dennoch auf triviale Weise in die Terme der betreffenden Lagrangedichte implementieren zu können, bietet es sich an, diese durch die Multiplikation mit einer unitären Verschiebungsmatrix U_0 auszudrücken. Durch die Unitarität sind insbesondere rein derivative Terme automatisch normiert, sodass eine Renormierung nur für Mischterme in nächstführenden Ordnungen erforderlich wird. Des Weiteren können die Massen der Freiheitsgrade in führender Ordnung direkt aus der Krümmung der Lagrangedichte im Ursprung ermittelt werden und es treten lediglich symmetrische 4-Vertices in der späteren Schleifenrechnung auf.

Wie in [34] gezeigt, führt ein naiver multiplikativer Ansatz der Form $U' = U_0 U$ zu einer ganzen Reihe von Komplikationen, die sich bspw. in einer drastischen Zunahme der symmetriebrechenden Terme und darüber hinaus in zusätzlichen nichtdiagonalen Elementen des inversen Propagators äußern. Der bislang optimale Ansatz, die Verschiebung durch den Massen-Twist in die effektiven Lagrangedichten zu implementieren, ist eine symmetrisierte Parametrisierung der Feldmatrix U der Form

$$U' := U_0^{\frac{1}{2}} \hat{U} U_0^{\frac{1}{2}} = \exp \left[\frac{i}{2F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \check{\phi}_a \right] \exp \left[\frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \hat{\phi}_a \right] \exp \left[\frac{i}{2F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \check{\phi}_a \right]. \quad (5.39)$$

Durch zweifache Anwendung³² der BCH-Reihe (s. Rg. (V)) und Bildung des natürlichen Logarithmus lassen sich dann die Felder

$$\hat{\phi}_{1,2} = \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} \right] \phi_{1,2} + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (5.40a)$$

$$\hat{\phi}_3 = 1 + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (5.40b)$$

$$\hat{\phi}_{4,5,6,7} = \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{24F_0^2} \right] \phi_{4,5,6,7} + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (5.40c)$$

$$\hat{\phi}_8 = 1 + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (5.40d)$$

in der verschobenen Parametrisierung ermitteln. Setzt man die modifizierte Feldmatrix U' in die Lagrangedichte führender Ordnung ein und bestimmt wie gewohnt die Hesse-Matrix bzgl. des Ursprungs, reproduziert sich die in Kap. 5.1.2 gefundene Massenmatrix nach deutlich verkürzter Rechnung (vgl. Rg. (VI)).

Für die weiteren Berechnungen wird stets die optimierte Parametrisierung verwandt und die *Hut*-Kennzeichnung der Übersicht halber, falls nicht anders erwähnt, fallen gelassen.

5.2. Mesonenmassen in nächstführender Ordnung

Die Berechnung der Mesonenmassen in der nächstführenden Ordnung chiraler Störungstheorie erfolgt auf Treelevel-Ebene in gleicher Weise wie in der führenden Ordnung. Ausgehend von der effektiven Gitter-Lagrangedichte in Gl. (4.45) wird zunächst das Minimum bestimmt und mit Hilfe der optimierten Parametrisierung (5.39) in die Entwicklung implementiert.

Anders als in führender Ordnung treten hier allerdings derivative Mischterme mit den Quarkmassen- bzw. Gitterspurionen auf, sodass eine automatische Renormierung, wie in Kap. 5.1.3 beschrieben, nicht gegeben ist. Folglich müssen die derivativen Terme mit Koeffizienten $L_{4,5}$ und $W_{4,5}$ um das neue Minimum entwickelt werden, um wie zuvor Renormierungskonstanten zu bestimmen. Analog zu Rg. (VI) können dann die Treelevel-Massen nächstführender Ordnung bestimmt und im Bezug auf das Minimum renormiert werden. Wie im vorherigen Kapitel kann die Lagrangedichte zunächst in einen derivativen und

³² Zur Anwendung der BCH-Reihe auf Produkte aus drei Exponentialfunktionen wurden in den Rechnungen die Formeln aus [36] verwendet

einen rein symmetriebrechenden Anteil aufgeteilt werden, sodass

$$\mathcal{L}_{\text{NLO,der}} = \mathcal{L}_{\text{LO,der}} + \mathcal{L}_{4,\text{der}}, \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \mathcal{L}_{4,\text{der}} = & L_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle + W_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle \\ & + L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \rangle + W_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (U \rho^\dagger + \rho U^\dagger) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \mathcal{L}_{\text{NLO,sb}} = \mathcal{L}_{\text{LO,sb}} + \mathcal{L}_{4,\text{sb}}, \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \mathcal{L}_{4,\text{sb}} = & -L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 - W_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle \\ & - L_7 \langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle^2 - W_7 \langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle \langle U \rho^\dagger - \rho U^\dagger \rangle \\ & - L_8 \langle U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \rangle - W_8 \langle U \rho^\dagger U \chi^\dagger + \rho U^\dagger \chi U^\dagger \rangle \\ & - W'_6 \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle^2 - W'_7 \langle U \rho^\dagger - \rho U^\dagger \rangle^2 \\ & - W'_8 \langle U \rho^\dagger U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rho U^\dagger \rangle + \text{const.} \end{aligned}$$

die für die weiteren Rechnungen relevanten Terme darstellen.

Im Anschluss an die nun folgende Bestimmung der Treelevel-Massen werden die Selbstwechselwirkungsvertices in Tab. 3.1 zur Berechnung der Selbstenergie über den Propagator führender Ordnung herangezogen, um Schleifenkorrekturen in die Ausdrücke der Mesonenmassen einfließen zu lassen. Dabei werden Unendlichkeiten auftreten, die mit Hilfe der *Dimensionalen Regularisierung* behandelt werden können, sodass die Theorie schlussendlich vollständig über die NLO-Entwicklungskoeffizienten renormiert werden kann.

5.2.1. Verschiebung des Minimums und Renormierungskonstanten

Für eine übersichtliche Entwicklung des symmetriebrechenden Terms in nächstführender Ordnung werden die zusätzlichen Terme mit chiraler Dimension $D = 4$ zunächst getrennt betrachtet, bevor sie zusammen mit den bekannten Termen führender Ordnung zur Bestimmung des Minimums zusammengefasst werden können³³.

L_6 , W_6 und W'_6

Das Quadrat der Spur im L_6 -Term kann analog zu den Termen führender Ordnung in Rg. (I) berechnet werden. Nach Rg. (VII.a) ergibt sich bis zur quadratischen Ordnung in den Feldern der Ausdruck³⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO},L_6} := & -L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{NLO},L_6}^{(2)} = & \frac{16L_6}{F_0^2} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left[\frac{1}{2} \hat{\chi} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{4} (\hat{\chi} + \chi_s) \vec{K}^2 + \frac{1}{6} (\hat{\chi} + 2\chi_s) \eta_8^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \Delta\chi (K_4 K_6 + K_5 K_7) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi \pi_1 \eta_8 \right]. \quad (5.43) \end{aligned}$$

Es wird deutlich, dass dieser Term, wie durch die chirale Dimension vorausgesetzt, ausschließlich quadratische Abhängigkeiten in den Quarkmassen aufweist. Des Weiteren zeigt sich, im Vergleich zu Gl. (5.6) lediglich ein zusätzlicher konstanter Faktor. Dazu völlig analog kann der entsprechende W'_6 -Term mit quadratischen Abhängigkeiten der Gitter-

³³ Dies ist die einzige Rechnung, in der die originalen Felder verwandt werden, um die optimierte Parametrisierung vollständig zu definieren

³⁴ Konstante Terme der Lagrangedichte, die in den anhängenden Rechnungen auftreten, werden im Folgenden als physikalisch irrelevant vernachlässigt

konstanten gemäß Rg. (VII.b) wie folgt ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO}, W'_6} &:= -W'_6 \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle^2 \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{NLO}, W'_6}^{(2)} &= \frac{16W'_6}{F_0^2} \left[(2\tilde{\rho} + \rho_0) \left[\frac{1}{2} \tilde{\rho} \tilde{\pi}^2 + \frac{1}{4} (\tilde{\rho} + \rho_0) \vec{K}^2 + \frac{1}{6} (\tilde{\rho} + 2\rho_0) \eta_8^2 - F_0 \rho_3 \pi_3 \right] - \rho_3^2 \pi_3^2 \right] \end{aligned} \quad (5.44)$$

Im Gegensatz zur Lagrangedichte führender Ordnung erlaubt die Berechnung in höheren chiralen Dimensionen Terme, die Mischungen der beiden explizit symmetriebrechenden Spurionen beinhalten. Nach Entwicklung der reinen Gitter- und Quarkmassenterme L_6 und W'_6 kann der Ausdruck für W_6 nach Rg. (VII.c) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO}, W_6} &:= -W_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle \langle U \rho^\dagger + \rho U^\dagger \rangle \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{NLO}, W_6}^{(2)} &= \frac{4W_6}{F_0^2} \left[(4\hat{\chi} \tilde{\rho} + \hat{\chi} \rho_0 + \chi_s \tilde{\rho}) \tilde{\pi}^2 + \frac{1}{2} (4\hat{\chi} \tilde{\rho} + 3\hat{\chi} \rho_0 + 3\chi_s \tilde{\rho} + 2\chi_s \rho_0) \vec{K}^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{3} (4\hat{\chi} \tilde{\rho} + 5\hat{\chi} \rho_0 + 5\chi_s \tilde{\rho} + 4\chi_s \rho_0) \eta_8^2 \\ &\quad \left. + \Delta\chi (2\tilde{\rho} + \rho_0) (K_4 K_6 + K_5 K_7) + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\chi (2\tilde{\rho} + \rho_0) \pi_1 \eta_8 \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

entwickelt und ausmultipliziert werden.

L_7 , W_7 und W'_7

Die Beiträge nächstführender Ordnung mit den Entwicklungskoeffizienten L_7 , W_7 und W'_7 können nach gleichen Definitionen und analogem Ansatz wie folgt aufgeschlüsselt werden (s. Rg. VIII.a/b/c):

$$\mathcal{L}_{\text{NLO}, L_7}^{(2)} := \frac{16L_7}{F_0^2} \left[\Delta\chi^2 \pi_1^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \Delta\chi \pi_1 \eta_8 + \frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi})^2 \eta_8^2 \right], \quad (5.46)$$

$$\mathcal{L}_{\text{NLO}, W'_7}^{(2)} := \frac{16W'_7}{3F_0^2} (2\rho_0^2 - \tilde{\rho} \rho_0 + \rho_3^2) \eta_8^2 \quad (5.47)$$

$$\text{und} \quad \mathcal{L}_{\text{NLO}, W_7}^{(2)} := \frac{16W_7}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi}) (\rho_0 - \tilde{\rho}) \eta_8^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\chi (\rho_0 - \tilde{\rho}) \pi_1 \eta_8 \right]. \quad (5.48)$$

Wie bei den ersten drei Termen ergeben sich quadratische Abhängigkeiten von Gitterkonstanten und Quarkmassen sowie Mischterme. Die gefundenen Ausdrücke liefern allerdings nur Beiträge im π^0 - η -Sektor.

L_8 , W_8 und W'_8

Für die letzten drei symmetriebrechenden Terme wird zunächst eine quadratische Ergänzung durchgeführt, um sie unter Ausnutzung der Unitarität der Feldmatrix U sowie der Zyklizität der Spur in eine einfachere Gestalt zu bringen. Für den L_8 -Term ergibt sich bspw.

$$\mathcal{L}_{\text{NLO}, L_8} := -L_8 \langle U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \rangle \quad (5.49)$$

$$= -L_8 \langle U \chi^\dagger U \chi^\dagger + 2\chi \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \rangle + \text{const.}$$

$$= -L_8 \langle U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi^\dagger U U^\dagger \chi + U^\dagger \chi \chi^\dagger U + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \rangle + \text{const.}$$

$$= -L_8 \langle [\chi^\dagger U + U^\dagger \chi]^2 \rangle + \text{const.} \quad (5.50)$$

Die Vereinfachungen für die zwei weiteren Terme erfolgen analog.

Eine Entwicklung der drei Ausdrücke ist dann nach Rg. (IX.a/b/c) gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO},L_8}^{(2)} = \frac{8L_8}{F_0^2} & \left[(\hat{\chi}^2 + \Delta\chi^2)\pi_1^2 + \hat{\chi}^2\pi_{2,3}^2 + \frac{1}{4}(\hat{\chi}^2 + \chi_s^2 + 2\hat{\chi}\chi_s + \Delta\chi^2)\vec{K}^2 \right. \\ & + \frac{1}{3}(\hat{\chi}^2 + 2\chi_s^2 + \Delta\chi^2)\eta_8^2 \\ & \left. + (\hat{\chi} + \chi_s)\Delta\chi(K_4K_6 + K_5K_7) + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\chi}\Delta\chi\pi_1\eta_8 \right], \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO},W_8'}^{(2)} := \frac{8W_8'}{F_0^2} & \left[\tilde{\rho}^2(\pi_1^2 + \pi_2^2) + (\tilde{\rho}^2 - \rho_3^2)\pi_3^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}(2\tilde{\rho}^2 + 2\tilde{\rho}\rho_0)\vec{K}^2 + \frac{1}{3}(3\tilde{\rho}^2 + \rho_3^2)\eta_8^2 - 2F_0\tilde{\rho}\rho_3\pi_3 \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO},W_8}^{(2)} := \frac{8W_8}{F_0^2} & \left[\hat{\chi}\tilde{\rho}\tilde{\pi}^2 + \frac{1}{4}(\hat{\chi}\tilde{\rho} + \hat{\chi}\rho_0 + \chi_s\tilde{\rho} + \chi_s\rho_0)\vec{K}^2 + \frac{1}{3}(\hat{\chi}\tilde{\rho} + 2\chi_s\rho_0)\eta_8^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\tilde{\rho} + \rho_0)\Delta\chi(K_4K_6 + K_5K_7) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{\rho}\Delta\chi\pi_1\eta_8 - F_0\hat{\chi}\rho_3\pi_3 \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

Wie schon in führender Ordnung, treten lineare Feldterme nur für π_3 bzw. ϕ_3 auf, sodass das Minimum ausschließlich in ϕ_3 -Richtung verschoben ist. Nach Zusammenfassung der symmetriebrechenden Terme führender Ordnung in Gl. (5.6) und der neu entwickelten ergibt sich der Ausdruck³⁵:

$$\begin{aligned} \check{\phi}_3 = F_0\rho_3 & \left[F_0^2 + 8W_6(2\hat{\chi} + \chi_s) + 8W_8\hat{\chi} + 16W_6'(2\tilde{\rho} + \rho_0) + 16W_8'\tilde{\rho} \right] \\ & \cdot \left[\hat{\chi} + \tilde{\rho} + 16L_6(2\hat{\chi} + \chi_s)\hat{\chi} + 8W_6(4\hat{\chi}\tilde{\rho} + \chi_s\tilde{\rho} + \rho_0\hat{\chi}) \right. \\ & \left. + 16L_8(\hat{\chi}^2 + \Delta\chi^2) + 16W_8\hat{\chi}\tilde{\rho} - 32W_6'\rho_3^2 + 16W_8'(\tilde{\rho}^2 - \rho_3^2) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\Rightarrow \check{\phi}_3 = F_0\rho_3 \frac{F_0^2 + 8W_6(2\hat{\chi} + \chi_s) + 8W_8\hat{\chi}}{F_0^2\hat{\chi} + 16L_6(2\hat{\chi} + \chi_s)\hat{\chi} + 16L_8(\hat{\chi}^2 + \Delta\chi^2)} + \mathcal{O}(a^2). \quad (5.55)$$

Da das Minimum wie in Kap. 5.1 nur quadratisch oder in Verbindung mit ρ_3 auftreten wird, genügt es, die Entwicklung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(a)$ zu betrachten.

Die Renormierungskonstanten Z_a berechnen sich durch Einsetzen der optimierten Parametrisierung in die derivativen Terme der Lagrangedichte und anschließender Entwicklung um den neuen Ursprung.

L₄ und W₄

Unter Implementierung der Verschiebung durch die neue Parametrisierung in die beiden ersten derivativen Terme nächstführender Ordnung bleiben die Spuren mit den Feldableitungen invariant, sodass lediglich die Faktoren mit den symmetriebrechenden Spurionen in $\check{\phi}_3$ entwickelt werden müssen. Unter Anwendung der Zwischenergebnisse von Rg. (II) bestimmen sich die betreffenden Ausdrücke nach Rg. (X.a/b) zu

$$\mathcal{L}'_{\text{NLO},L_4} \Big|_{\Phi=0} := \frac{4L_4}{F_0^2} \sum_{a=1}^8 (\partial_\mu \phi_a)^2 \left[2\hat{\chi} + \chi_s - \frac{\check{\phi}_3^2}{F_0^2}\hat{\chi} \right] + \mathcal{O}(a^3) \quad (5.56)$$

und

$$\mathcal{L}'_{\text{NLO},W_4} \Big|_{\Phi=0} := \frac{4W_4}{F_0^2} \sum_{a=1}^8 (\partial_\mu \phi_a)^2 \left[2\tilde{\rho} + \rho_0 + \frac{2\check{\phi}_3}{F_0}\rho_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{F_0^2}\tilde{\rho} \right] + \mathcal{O}(a^3). \quad (5.57)$$

³⁵ Auf die explizite Kennzeichnung der NLO-Größen wird in diesem Kapitel verzichtet

L_5 und W_5

Die weiteren zur Renormierung beitragenden Terme weisen Mischungen mit symmetriebrechenden Größen innerhalb der Spuren auf. Nach Einsetzen der optimierten Parametrisierung erhält man für den L_5 -Term

$$\mathcal{L}'_{\text{NLO},L_5} := L_5 \langle \partial_\mu U' \partial_\mu U'^\dagger (\chi U'^\dagger + U' \chi^\dagger) \rangle \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} &= L_5 \langle U_0^{\frac{1}{2}} \partial_\mu U U_0^{\frac{1}{2}} U_0^{\frac{1}{2}\dagger} \partial_\mu U^\dagger \left[\chi U_0^{\frac{1}{2}\dagger} U^\dagger U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{\frac{1}{2}} U U_0^{\frac{1}{2}} \chi \right] \rangle \\ &= L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \left[U_0^{\frac{1}{2}\dagger} \chi U_0^{\frac{1}{2}} U^\dagger + U U_0^{\frac{1}{2}} \chi U_0^{\frac{1}{2}} \right] \rangle, \end{aligned} \quad (5.59)$$

sodass sich nach analoger Rechnung für den Ausdruck mit dem Gitter-Spurion ρ insgesamt die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{NLO},L_5} \Big|_{\Phi=0} &= \frac{4L_5}{F_0^2} \left[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 \left[\hat{\chi} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \hat{\chi} \right] + (\partial_\mu \vec{K})^2 \frac{1}{2} \left[\hat{\chi} + \chi_s - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \hat{\chi} \right] \right. \\ &\quad + (\partial_\mu \eta_8)^2 \frac{2}{3} \left[\hat{\chi} + 2\chi_s - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \hat{\chi} \right] \\ &\quad + ((\partial_\mu K_4)(\partial_\mu K_6) + (\partial_\mu K_5)(\partial_\mu K_7)) \left[\Delta\chi - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \Delta\chi \right] \\ &\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} (\partial_\mu \pi_1)(\partial_\mu \eta_8) \left[\Delta\chi - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \Delta\chi \right] \right] + \mathcal{O}(a^3) \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \text{und } \mathcal{L}'_{\text{NLO},W_5} \Big|_{\Phi=0} &:= \frac{4W_5}{F_0^2} \left[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 \left[\tilde{\rho} + \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \tilde{\rho} \right] \right. \\ &\quad + (\partial_\mu \vec{K})^2 \frac{1}{2} \left[\tilde{\rho} + \rho_0 + \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \tilde{\rho} \right] \\ &\quad \left. + (\partial_\mu \eta_8)^2 \frac{2}{3} \left[\tilde{\rho} + 2\rho_0 + \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \tilde{\rho} \right] \right] + \mathcal{O}(a^3) \end{aligned} \quad (5.61)$$

finden (s. Rg. (XI.a) und Rg. (XI.b)).

Fasst man die vier Terme zusammen und schlüsselt sie nach den Mesonenfeldern auf, ergeben sich unter Berücksichtigung des Terms führender Ordnung und nach Einsetzen des Minimums insgesamt folgende kinetische Lagrange-Terme³⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{der},\pi} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi})^2 \left[1 + \frac{4}{F_0^2} \left[(4L_4 + 2L_5) \hat{\chi} + 2L_4 \chi_s + (4W_4 + 2W_5) \tilde{\rho} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2W_4 \rho_0 - (2L_4 - 4W_4 + L_5 - 2W_5) \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} \right] \right] + \mathcal{O}(a^3), \end{aligned} \quad (5.62a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{der},K} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{K})^2 \left[1 + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{2} \left[(8L_4 + 2L_5) \hat{\chi} + (4L_4 + 2L_5) \chi_s + (8W_4 + 2W_5) \tilde{\rho} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (4W_4 + 2W_5) \rho_0 - (4L_4 - 8W_4 + L_5 - 2W_5) \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} \right] \right] + \mathcal{O}(a^3) \end{aligned} \quad (5.62b)$$

³⁶ Nach Einsetzen der Verschiebung treten Mischterme aus symmetriebrechender Gitterkonstanten und Quarkmassen, die ebenfalls ab der dritten Ordnung gemäß der Hierarchie (5.8) vernachlässigt werden

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{der},\eta} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta_8)^2 \left[1 + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{3} \left[(12L_4 + 2L_5)\hat{\chi} + (6L_4 + 4L_5)\chi_s + (12W_4 + 2W_5)\tilde{\rho} \right. \right. \\ \left. \left. + (6W_4 + 4W_5)\rho_0 - (6L_4 - 12W_4 + L_5 - 2W_5)\frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} \right] \right] + \mathcal{O}(a^3). \end{aligned} \quad (5.62c)$$

Des Weiteren treten bedingt durch die u-d-Massendifferenz Mischterme in den Feldern auf:

$$\mathcal{L}'_{\text{der},46,57} = \frac{1}{2}((\partial_\mu K_4)(\partial_\mu K_6) + (\partial_\mu K_5)(\partial_\mu K_7)) \left[1 + \frac{8L_5}{F_0^2} \Delta\chi \left[1 - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}^2} \right] \right] + \mathcal{O}(a^3) \quad (5.63a)$$

$$\text{und} \quad \mathcal{L}'_{\text{der},18} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi_1)(\partial_\mu \eta_8) \left[1 + \frac{8L_5}{F_0^2} \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\chi \left[1 - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}^2} \right] \right] + \mathcal{O}(a^3). \quad (5.63b)$$

Die neuen Renormierungskonstanten Z_a auf der Diagonalen des Propagators lassen sich leicht ablesen. Des Weiteren wird erkennbar, dass der Propagator in nächstführender Ordnung keine diagonale Gestalt mehr aufweist, sodass die Renormierungskonstanten in einer nichtdiagonalen Matrix b^K zusammengefasst werden und über einige Matrixoperationen analog zu Gl. (5.16) mit der Hesse-Matrix verrechnet werden.

5.2.2. Krümmung der Lagrangedichte und Treelevel-Massen

Der Ansatz zur Bestimmung der Hesse-Matrix in optimierter Parametrisierung ergibt sich wieder über die zweifache Ableitung und Entwicklung der Exponentialfunktionen analog zu Rg. (VI). Mit den in Rg. (XII) dargestellten Rechenregeln lassen sich die Terme von \mathcal{L}_{4sb} in eine Gestalt bringen, mit Hilfe derer die Hesse-Matrix bestimmt werden kann (vgl. Rg. (XIII) bis (XV)). Die Einträge werden über das oben erwähnte Matrixprodukt und die gefundenen Renormierungskonstanten zu einer physikalischen Massenmatrix umgeschrieben. Für den Pionen-Sektor findet sich nach Berechnung der Spuren auf der Diagonale:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{ii}^{(\pi)} = \hat{\chi} + \tilde{\rho} + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \\ + \frac{4}{F_0^2} \left[(8L_6 + 4L_8 - (4L_4 + 2L_5))\hat{\chi}^2 \right. \\ + (4L_6 - 2L_4)\hat{\chi}\chi_s \\ + (\delta_{i1}(8L_7 + 4L_8 - \frac{4}{3}L_5))\Delta\chi^2 \\ + (8W_6 + 4W_8 - (4L_4 + 2L_5 + 4W_4 + 2W_5))\hat{\chi}\tilde{\rho} \\ + (2W_6 - 2W_4)\hat{\chi}\rho_0 \\ + (2W_6 - 2L_4)\chi_s\tilde{\rho} \\ + (8W'_6 + 4W'_8 - (4W_4 + 2W_5))\tilde{\rho}^2 \\ + (4W'_6 - 2W_4)\tilde{\rho}\rho_0 \\ + ((1 + \delta_{i3})(-8L_6 - 4L_8 + 8W_6 + 4W_8) \\ - 8\delta_{i3}W'_6 - 4\delta_{i3}W'_8 - (4W_4 + 2W_5))\rho_3^2 \\ \left. + (-2L_6 + 2W_6 - L_4)\rho_3^2 \frac{\chi_s}{\hat{\chi}} + \delta_{i1} \frac{2}{3} L_5 \rho_3^2 \frac{\Delta\chi^2}{\hat{\chi}^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.64a)$$

Es fällt auf, dass die Pionen in nächstführender Ordnung explizite Terme proportional zur quadratischen u-d-Massendifferenz enthalten, die eine Aufspaltung zum π^0 implizieren. Darüber hinaus findet sich neben der Aufspaltung zwischen geladenen und ungeladenen Pionen eine durch den Twist implizierte Massendifferenz zwischen den π_2 - und π_3 -Feldern, die sich zu den geladenen Pionen überlagern. Aufgrund dieser Überlagerung verursachen die Terme allerdings keine unphysikalische Aufhebung der Entartung von positivem und negativem Pion.

Im Grenzwert gleicher up- und down-Massen fallen nichtdiagonale Elemente der Matrix weg und das gefundene Ergebnis entspricht den Treelevel-Massen in der Arbeit von T. Sudmann (s. [34]).

Vollkommen analog erhält man für die Diagonale von Kaonen und η -Meson

$$\mathfrak{M}_{ii}^{(K)} = \frac{1}{2} \left[\hat{\chi} + \chi_s + \tilde{\rho} + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right] \quad (5.64b)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{2} \left[(8L_6 + 2L_8 - (4L_4 + L_5)) \hat{\chi}^2 \right. \\ &\quad + (12L_6 + 4L_8 - (6L_4 + 2L_5)) \hat{\chi} \chi_s \\ &\quad + (4L_6 + 2L_8 - (2L_4 + L_5)) \chi_s^2 + (2L_8 - 2L_5) \Delta \chi^2 \\ &\quad + (8W_6 + 2W_8 - (4L_4 + L_5 + 4W_4 + W_5)) \hat{\chi} \tilde{\rho} \\ &\quad + (6W_6 + 2W_8 - (4L_4 + L_5 + 2W_4 + W_5)) \hat{\chi} \rho_0 \\ &\quad + (6W_6 + 2W_8 - (2L_4 + L_5 + 4W_4 + W_5)) \chi_s \tilde{\rho} \\ &\quad + (4W_6 + 2W_8 + 2W_8 - (2L_4 + L_5 + 2W_4 + W_5)) \chi_s \rho_0 \\ &\quad + (12W_6' + 4W_8' - (6W_4 + 2W_5)) \tilde{\rho}^2 \\ &\quad + (12W_6' + 4W_8' - (6W_4 + 2W_5)) \tilde{\rho} \rho_0 \\ &\quad + (-8L_6 - 4L_8 + 8W_6 + 4W_8 + 4W_6' - (6W_4 + 2W_5)) \rho_3^2 \\ &\quad \left. + (-6L_6 - 2L_8 + 6W_6 + 2W_8 \right. \\ &\quad \left. - (-L_4 + 4W_4 + W_5)) \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\hat{\chi}} + L_5 \rho_3^2 \frac{\Delta \chi^2}{\hat{\chi}^2} \right], \end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}_{88}^{(\eta)} = \frac{1}{3} \left[\hat{\chi} + 2\chi_s + \tilde{\rho} + 2\rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right] \quad (5.64c)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{9} \left[(24L_6 + 24L_7 + 12L_8 - (12L_4 + 2L_5)) \hat{\chi}^2 \right. \\ &\quad + (60L_6 - 48L_7 - (30L_4 + 8L_5)) \hat{\chi} \chi_s \\ &\quad + (24L_6 + 24L_7 + 24L_8 - (12L_4 + 8L_5)) \chi_s^2 + (12L_8 - 12L_5) \Delta \chi^2 \\ &\quad + (24W_6 + 24W_7 + 12W_8 - (12L_4 + 2L_5 + 12W_4 + 2W_5)) \hat{\chi} \tilde{\rho} \\ &\quad + (30W_6 - 24W_7 - (24L_4 + 4L_5 + 6W_4 + 4W_5)) \hat{\chi} \rho_0 \\ &\quad + (30W_6 - 24W_7 - (6L_4 + 4L_5 + 24W_4 + 4W_5)) \chi_s \tilde{\rho} \\ &\quad + (24W_6 + 24W_7 + 24W_8 - (12L_4 + 8L_5 + 12W_4 + 8W_5)) \chi_s \rho_0 \\ &\quad + (48W_6' + 48W_7' + 36W_8' - (24W_4 + 10W_5)) \tilde{\rho}^2 \\ &\quad + (60W_6' - 48W_7' - (30W_4 + 8W_5)) \tilde{\rho} \rho_0 \\ &\quad + (-24L_6 - 24L_7 - 24L_8 + 24W_6 + 24W_7 \\ &\quad \quad + 24W_8 + 24W_6' + 24W_7' + 12W_8' - (24W_4 + 10W_5)) \rho_3^2 \\ &\quad \left. + (-30L_6 + 24L_7 + 30W_6 \right. \\ &\quad \left. - 24W_7 - (-9L_4 + 24W_4 + 4W_5)) \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\hat{\chi}} + 6L_5 \rho_3^2 \frac{\Delta \chi^2}{\hat{\chi}^2} \right]. \end{aligned}$$

Auch für diese Mesonen gehen die Ergebnisse im Limes gleicher up- und down-Massen in die von Sudmann gefundenen Werte über. Auffällig ist hier, dass die Ausdrücke Terme proportional zur quadratischen u-d-Massendifferenz erhalten, die durch den L_5 -Term impliziert werden. Diese rufen allerdings keine Aufhebung der Massenentartung im Kaonen-Sektor hervor.

Neben den diagonalen Komponenten treten auch für die Massenmatrix nächstführender Ordnung bedingt durch $\Delta m \neq 0$ nichtdiagonale Elemente auf. Die Matrix hat analog zu Kap. 5.1.2 die Form

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{M}_{18} \\ 0 & \mathfrak{M}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{M}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{M}_{44} & 0 & \mathfrak{M}_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{M}_{44} & 0 & \mathfrak{M}_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{M}_{46} & 0 & \mathfrak{M}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{M}_{57} & 0 & \mathfrak{M}_{44} & 0 \\ \mathfrak{M}_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{M}_{88} \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{18} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\chi \left[1 + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{3} \left[(24L_6 + 48L_7 + 12L_8 - (12L_4 + 8L_5))\hat{\chi} \right. \right. \\ + (12L_6 - 48L_7 - (6L_4 + 4L_5))\chi_s \\ + (12W_6 + 24W_7 + 6W_8 - (4L_5 + 12W_4 + 4W_5))\tilde{\rho} \\ + (6W_6 - 24W_7 - (2L_5 + 6W_4 + 2W_5))\rho_0 \\ + (-12L_6 - 12L_7 - 12L_8 + 12W_6 + 24W_7 + 6W_8 \\ \left. \left. - (-6L_4 - 2L_5 + 12W_4 + 4W_5))\frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} + L_5\frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}^2}\chi_s \right] \right], \end{aligned} \quad (5.66a)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{46,57} = \frac{1}{2}\Delta\chi \left[1 + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{2} \left[(16L_6 + 8L_8 - (8L_4 + 4L_5))\hat{\chi} \right. \right. \\ + (8L_6 + 8L_8 - (4L_4 + 4L_5))\chi_s \\ + (8W_6 + 4W_8 - (2L_5 + 8W_4 + 2W_5))\tilde{\rho} \\ + (4W_6 + 4W_8 - (2L_5 + 4W_4 + 2W_5))\rho_0 \\ + (-8L_6 - 4L_8 + 8W_6 + 4W_8 \\ \left. \left. - (-4L_4 - L_5 + 8W_4 + 2W_5))\frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} + L_5\frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}^2}\chi_s \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.66b)$$

Um die endgültigen Ausdrücke für die Treelevel-Massen der acht Mesonen zu erhalten, muss die nun vollständig definierte Massenmatrix diagonalisiert werden. Analog zur Rechnung in führender Ordnung entspricht die Transformation zur Masseneigenbasis im Kaonen-Sektor jeweils einer Drehung um $\frac{\pi}{4}$, sodass Drehmatrix und Eigenvektor die selbe Gestalt haben. Für die Eigenwerte ergibt sich:

$$\lambda_{1,2} = \mathfrak{M}_{44} - \mathfrak{M}_{46,57} \quad \text{und} \quad \lambda_{3,4} = \mathfrak{M}_{44} + \mathfrak{M}_{46,57}. \quad (5.67)$$

Die Massenaufspaltung der Kaonen bezieht sich wie in führender Ordnung lediglich auf die geladenen und neutralen Kaonen - die geladenen Kaonen untereinander sind bspw. weiterhin massenentartet, wie es physikalisch sinnvoll ist. Im Gegensatz zu den Ergebnissen von K. Walter können keine Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m^2)$ in der Kaonen-Massendifferenz gefunden werden. Dieses Resultat ist konsistent mit dem Ausdruck, der in [20] angegeben

wird. Die Transformation im π^0 - η -Sektor kann völlig analog zur Rg. (IV) durchgeführt werden. Die Eigenwerte ergeben sich zu

$$\lambda_1 = \mathfrak{M}_{11} - \frac{1}{2}\Delta_{\pi\eta} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \mathfrak{M}_{88} + \frac{1}{2}\Delta_{\pi\eta}. \quad (5.68)$$

Die Massendifferenz ist dabei durch

$$\begin{aligned} \Delta_{\pi\eta} &= \frac{1}{2}[\mathfrak{M}_{88} - \mathfrak{M}_{11}] \left(\frac{2\mathfrak{M}_{18}}{\mathfrak{M}_{88} - \mathfrak{M}_{11}} \right)^2 + \mathcal{O}(\Delta\chi^4) \\ &= \frac{2\mathfrak{M}_{18}^2}{\mathfrak{M}_{88} - \mathfrak{M}_{11}} + \mathcal{O}(\Delta\chi^4) \end{aligned} \quad (5.69)$$

gegeben.

Setzt man die vollständigen Ausdrücke für die Quarkmassen- und Gitter-Spurionen in die Matrixkomponenten ein, erhält man die Treelevel-Massen nächstführender Ordnung chiraler Störungstheorie. Für das neutrale Pion ergibt sich nach Gl. (5.64a):

$$\begin{aligned} M_{\pi_1}^2 &= B_0(m_u + m_d) \\ &+ \frac{8B_0^2}{F_0^2} \left[(-2L_4 - L_5 + 4L_6 + 2L_8) [m_u^2 + m_d^2] \right. \\ &\quad + (-4L_4 - 2L_5 + 8L_6 + 4L_8)m_u m_d \\ &\quad + (-2L_4 + 4L_6) [m_u + m_d] m_s \\ &\quad \left. + \left(-\frac{2}{3}L_5 + 4L_7 + 2L_8\right) [m_d - m_u]^2 \right] \\ &+ 2aW_0 \cos(\omega) \\ &+ \frac{16aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-W_4 + W_6) [m_u + m_d] \right. \\ &\quad + (-2L_4 - L_5 - 2W_4 - W_5 + 4W_6 + 2W_8) [m_u + m_d] \cos(\omega) \\ &\quad \left. + (-2L_4 + 2W_6)m_s \cos(\omega) \right] \\ &+ \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \\ &+ \frac{32a^2W_0^2}{F_0^2} \left[-2W_4 - W_5 \right. \\ &\quad + (-W_4 + 2W_6') \cos(\omega) \\ &\quad + (4W_6' + 2W_8') \cos^2(\omega) \\ &\quad + (-4L_6 - 2L_8 + 4W_6 + 2W_8) \sin^2(\omega) \\ &\quad + \frac{1}{3}L_5 \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right]^2 \sin^2(\omega) \\ &\quad \left. + (-L_4 - 2L_6 + 2W_6) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \right] \\ &- \frac{1}{2}\Delta_{\pi\eta} + \mathcal{O}(\Delta m^4, a^3) \end{aligned}$$

(5.70a)

Es wird deutlich, dass die in der Theorie vorgeseigte automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung in nächstführender Ordnung nicht nur durch die u-d-Massendifferenz, sondern auch explizit durch die W_4 - und W_6 -Terme aufgehoben wird. Weiterhin zeigt sich im Full-Twist $\omega = \frac{\pi}{2}$

qualitativ ein Verschwinden des weitaus größten Teils, der in a linearen Fehlerterme. Im Gegensatz zu den Ergebnissen führender Ordnung (vgl. Gl. (5.33)) enthalten die Pionenmassen neben den Beiträgen des physikalischen Quarkinhaltes explizite Abhängigkeiten von der strange-Masse. Diese bestehen auch im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ und werden durch die Koeffizienten L_4 und L_6 induziert. Da diese Größen allerdings nach [22,23] klein sind (vgl. Tab. 3.4), handelt es sich um vernachlässigbare Effekte.

Die *geladenen Pionen* erhalten nach Einsetzen der physikalischen Größen folgende Massen auf Treelevel:

$$\begin{aligned}
 M_{\pi_i}^2 = & B_0(m_u + m_d) & i = 2, 3 \\
 & + \frac{8B_0^2}{F_0^2} \left[(-2L_4 - L_5 + 4L_6 + 2L_8) [m_u^2 + m_d^2] \right. \\
 & \quad + (-4L_4 - 2L_5 + 8L_6 + 4L_8) m_u m_d \\
 & \quad \left. + (-2L_4 + 4L_6) [m_u + m_d] m_s \right] \\
 & + 2aW_0 \cos(\omega) \\
 & + \frac{16aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-W_4 + W_6) [m_u + m_d] \right. \\
 & \quad + (-2L_4 - L_5 - 2W_4 - W_5 + 4W_6 + 2W_8) [m_u + m_d] \cos(\omega) \\
 & \quad \left. + (-2L_4 + 2W_6) m_s \cos(\omega) \right] \\
 & + \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \\
 & + \frac{32a^2W_0^2}{F_0^2} \left[-2W_4 - W_5 - 4W_6' - 2\delta_{i3}W_8' \right. \\
 & \quad + (-W_4 + 2W_6') \cos(\omega) \\
 & \quad + ((1 + \delta_{i3})(4W_6' + 2W_8')) \cos^2(\omega) \\
 & \quad + ((1 + \delta_{i3})(-4L_6 - 2L_8 + 4W_6 + 2W_8)) \sin^2(\omega) \\
 & \quad \left. + (-L_4 - 2L_6 + 2W_6) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \right] + \mathcal{O}(a^3)
 \end{aligned}$$

(5.70b)

Die gefundenen Ausdrücke entsprechen weitestgehend denen der neutralen Pionen. Die Massenaufspaltung ist zum einen durch die π - η -Aufspaltung nach Diagonalisierung der Massenmatrix gegeben (s. Gl. (5.69)), wird aber zusätzlich explizit durch den L_5 -, L_7 - und den L_8 -Term der Lagrangedichte nächstführender Ordnung ebenfalls mit Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m^2)$ induziert. Die Beiträge durch das strange-Quark treten hier völlig analog auf.

Betrachtet man die durch das Gitter verursachten Fehlerterme, zeigt sich ein ähnliches Verhalten, wie im ungeladenen Fall. Die Aufspaltung zwischen den Feldern π_2 und π_3 , deren Linearkombinationen in der gewählten Parametrisierung die geladenen Pionen repräsentieren, zeigt sich in dieser Darstellung nicht nur durch den Massen-Twist, sondern auch für verschwindende Twist-Winkel. Da dieser unphysikalische Effekt allerdings im naiven Kontinuumslimites verschwindet, ist er als reines Gitterartefakt zu deklarieren. Auf den Folgeseiten finden sich die Ausdrücke der geladenen und neutralen Kaonen sowie des η -Mesons. Die Ergebnisse folgen durch Bildung der Eigenwerte nach Gl. (5.67/68) und Einsetzen der relevanten Größen.

Treelevel-Massen der *geladenen Kaonen*:

$$\begin{aligned}
M_{K_i}^2 = & B_0(m_u + m_s) & i = 4, 5 \\
& + \frac{2B_0^2}{F_0^2} \left[(-8L_4 - 3L_5 + 16L_6 + 8L_8)m_u^2 \right. \\
& \quad + L_5m_d^2 \\
& \quad + (-8L_4 - 4L_5 + 16L_6 + 8L_8)m_s^2 \\
& \quad + (-8L_4 - 2L_5 + 16L_6 + 8L_8)m_um_d \\
& \quad + (-16L_4 - 8L_5 + 32L_6 + 16L_8)m_um_s \\
& \quad + (-8L_4 + 16L_6)m_dm_s \\
& \quad \left. + (2L_8 - 2L_5)[m_d - m_u]^2 \right] \\
& + aW_0(1 + \cos(\omega)) \\
& + \frac{4aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-4L_4 - 2L_5 - 4W_4 - 2W_5 + 8W_6 + 4W_8)m_u \right. \\
& \quad + (-4L_4 + 4W_6)m_d \\
& \quad + (-4L_4 - 2L_5 - 4W_4 - 2W_5 + 8W_6 + 4W_8)m_s \\
& \quad + (-4L_4 - 2L_5 - 8W_4 - 2W_5 + 12W_6 + 4W_8)m_u \cos(\omega) \\
& \quad + (-4L_4 + 4W_6)m_d \cos(\omega) \\
& \quad \left. + (-4L_4 - 2L_5 - 8W_4 - 2W_5 + 12W_6 + 4W_8)m_s \cos(\omega) \right] \\
& + \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \\
& + \frac{4a^2W_0^2}{F_0^2} \left[-12W_4 - 4W_5 + 8W_6' \right. \\
& \quad + (-12W_4 - 4W_5 + 24W_6' + 8W_8') \cos(\omega) \\
& \quad + (16W_6' + 8W_8') \cos^2(\omega) \\
& \quad + (16W_6 + 8W_8) \sin^2(\omega) \\
& \quad + (8L_6 + 4L_8 - 4L_4 - L_5 \\
& \quad \quad + 8W_4 + 2W_5 - 8W_6 - 4W_8) \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \\
& \quad - 2L_5 \left[\frac{m_s(m_d - m_u)}{(m_d + m_u)^2} \right] \sin^2(\omega) \\
& \quad + 2L_5 \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right]^2 \sin^2(\omega) \\
& \quad + (4L_4 - 24L_6 - 8L_8 \\
& \quad \quad - 16W_4 - 4W_5 + 24W_6 + 8W_8) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \left. \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

(5.70c)

Treelevel-Massen der *neutralen Kaonen*:

$$\begin{aligned}
M_{K_i}^2 &= B_0(m_d + m_s) & i = 6, 7 \\
&+ \frac{2B_0^2}{F_0^2} \left[L_5 m_u^2 \right. \\
&\quad + (-8L_4 - 3L_5 + 16L_6 + 8L_8) m_d^2 \\
&\quad + (-8L_4 - 4L_5 + 16L_6 + 16L_8) m_s^2 \\
&\quad + (-8L_4 - 2L_5 + 16L_6 + 8L_8) m_u m_d \\
&\quad + (-8L_4 + 16L_6) m_u m_s \\
&\quad + (-16L_4 - 8L_5 + 32L_6 + 16L_8) m_d m_s \\
&\quad \left. + (2L_8 - 2L_5) [m_d - m_u]^2 \right] \\
&+ aW_0(1 + \cos(\omega)) \\
&+ \frac{4aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-4L_4 + 4W_6) m_u \right. \\
&\quad + (-4L_4 - 2L_5 - 4W_4 - 2W_5 + 8W_6 + 4W_8) m_d \\
&\quad + (-4L_4 - 2L_5 - 4W_4 - 2W_5 + 8W_6 + 4W_8) m_s \\
&\quad + (-4L_4 + 4W_6) m_u \cos(\omega) \\
&\quad + (-4L_4 - 2L_5 - 8W_4 - 2W_5 + 12W_6 + 4W_8) m_d \cos(\omega) \\
&\quad \left. + (-4L_4 - 2L_5 - 8W_4 - 2W_5 + 12W_6 + 4W_8) m_s \cos(\omega) \right] \\
&+ \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \\
&+ \frac{4a^2W_0^2}{F_0^2} \left[-12W_4 - 4W_5 + 8W_6' \right. \\
&\quad + (-12W_4 - 4W_5 + 24W_6' + 8W_8') \cos(\omega) \\
&\quad + (16W_6' + 8W_8') \cos^2(\omega) \\
&\quad + (16W_6 + 8W_8) \sin^2(\omega) \\
&\quad + (-8L_6 - 4L_8 + 4L_4 + L_5 \\
&\quad \quad - 8W_4 - 2W_5 + 8W_6 + 4W_8) \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \\
&\quad + 2L_5 \left[\frac{m_s(m_d - m_u)}{(m_d + m_u)^2} \right] \sin^2(\omega) \\
&\quad + 2L_5 \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right]^2 \sin^2(\omega) \\
&\quad + (4L_4 - 24L_6 - 8L_8 \\
&\quad \quad - 16W_4 - 4W_5 + 24W_6 + 8W_8) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \left. \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

(5.70d)

Treelevel-Masse des η -Mesons:

$$\begin{aligned}
M_{\eta_8}^2 = & \frac{1}{3}B_0(m_u + m_d + 4m_s) \\
& + \frac{8B_0^2}{F_0^2} \frac{1}{9} \left[(-6L_4 - L_5 + 12L_6 + 12L_7 + 6L_8) [m_u^2 + m_d^2] \right. \\
& \quad + (-24L_4 - 16L_5 + 48L_6 + 48L_7 + 48L_8) m_s^2 \\
& \quad + (-12L_4 - 2L_5 + 24L_6 + 24L_7 + 12L_8) m_u m_d \\
& \quad + (-30L_4 - 8L_5 + 60L_6 - 48L_7) [m_u + m_d] m_s \\
& \quad \left. + (6L_8 - 6L_5) [m_d - m_u]^2 \right] \\
& + \frac{2aW_0(2 + \cos(\omega))}{3} \\
& + \frac{16aB_0W_0}{F_0^2} \frac{1}{9} \left[(-12L_4 - 2L_5 - 3W_4 - 2W_5 + 15W_6 - 12W_7) [m_u + m_d] \right. \\
& \quad + (-12L_4 - 8L_5 - 12W_4 - 8W_5 + 24W_6 + 24W_7 + 24W_8) m_s \\
& \quad + (-6L_4 - L_5 - 6W_4 - W_5 \\
& \quad \quad + 12W_6 + 12W_7 + 6W_8) [m_u + m_d] \cos(\omega) \\
& \quad \left. + (-6L_4 - 4L_5 - 24W_4 - 4W_5 + 30W_6 - 24W_7) m_s \cos(\omega) \right] \\
& + \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{3B_0(m_u + m_d)} \\
& + \frac{32a^2W_0^2}{F_0^2} \frac{1}{9} \left[-12W_4 - 5W_5 + 12W_6' + 12W_7' + 6W_8' \right. \\
& \quad + (-15W_4 - 4W_5 + 30W_6' - 24W_7') \cos(\omega) \\
& \quad + (12W_6' + 12W_7' + 12W_8') \cos^2(\omega) \\
& \quad + (-12L_6 - 12L_7 - 12L_8 + 12W_6 + 12W_7 + 12W_8) \sin^2(\omega) \\
& \quad + 3L_5 \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right]^2 \sin^2(\omega) \\
& \quad + (9L_4 - 30L_6 + 24L_7 \\
& \quad \quad - 24W_4 - 4W_5 + 30W_6 - 24W_7) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \left. \right] \\
& + \frac{1}{2} \Delta_{\pi\eta} + \mathcal{O}(\Delta m^4, a^3)
\end{aligned}$$

(5.70e)

Für die Kaonen zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie für die Pionen. Neben den linearen Termen in den Quarkmassen der jeweiligen Quarkinhalte treten in nächstführender Ordnung zusätzliche Beiträge aller drei Quarkflavors auf. So finden sich bspw. für die geladenen Kaonen Ausdrücke, die sowohl die up-Quarkmasse enthalten, als auch solche, die das down-Quark repräsentieren, das nicht zum physikalischen Quarkinhalt dieser Mesonen gehört. Ein analoges Verhalten lässt sich für die ungeladenen Kaonen im Bezug auf das up-Quark beobachten. Weitergehend treten neben den linearen Gittertermen auch Mischterme aus Quarkmassen und Gitterkonstanten auf. Die führende Ordnung der Gitterfehler verschwindet auch in diesem Fall für die Wahl des Full-Twists nicht.

Die Massenaufspaltung der Kaonen ist nach Einsetzen der physikalischen Größen in Gl. (5.66b) gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\Delta_{K^0 K^\pm} = & B_0(m_d - m_u) \\
& + \frac{4B_0^2}{F_0^2} \left[(-4L_4 - 2L_5 + 8L_6 + 4L_8) [m_d^2 - m_u^2] \right. \\
& \quad \left. + (-4L_4 - 4L_5 + 8L_6 + 8L_8) [m_d - m_u] m_s \right] \\
& + \frac{8aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-L_5 - 2W_4 - W_5 + 2W_6 + 2W_8) [m_d - m_u] \right. \\
& \quad \left. + (-L_5 - 4W_4 - W_5 + 4W_6 + 2W_8) [m_d - m_u] \cos(\omega) \right] \\
& + \frac{8a^2W_0^2}{F_0^2} \left[(4L_4 + L_5 - 8L_6 - 4L_8 \right. \\
& \quad - 8W_4 - 2W_5 + 8W_6 + 4W_8) \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \\
& \quad \left. + 2L_5 \left[\frac{m_s(m_d - m_u)}{(m_d + m_u)^2} \right] \sin^2(\omega) \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

(5.71)

In nächstführender Ordnung zeigt die Massendifferenz der geladenen und ungeladenen Kaonen Gitterartefakte, die linear mit der u-d-Massenaufspaltung eingehen. Die führende Ordnung $\mathcal{O}(a)$ kann auch für diese Messgröße nicht automatisch durch Full-Twist aufgehoben werden.

Weiterhin kann eine Abhängigkeit von der strange-Masse beobachtet werden, die durch die Parameter L_4 , L_5, L_6 und L_8 induziert wird. Da sich der Quarkinhalt der Kaonen nur im u-d-Sektor unterscheidet, ist dies ein zunächst unerwartetes Ergebnis, das auch im Kontinuumslimit beobachtet wird. Der bereits erwähnte Umstand, dass die empirischen Werte für L_4 und L_6 klein sind, relativiert diesen Effekt allerdings in ähnlicher Weise, wie schon im Fall der Pionen. Der weitere Beitrag über den L_5 - und L_8 -Koeffizienten zeigt wiederum, dass die Mischung in diesem nicht zu vernachlässigen ist.

Die durch die Diagonalisierung ermittelte Korrektur im π^0 - η -Sektor ist nach Gl. (5.69) wie in führender Ordnung von $\mathcal{O}(\Delta m^2)$. Entwickelt man den führenden Term bis zur geforderten chiralen Dimension, ergibt sich das Ergebnis in Gl. (5.72). Des Weiteren wird der gesamte Ausdruck wie üblich bis zu quadratischen Termen in der Gitterkonstanten angegeben³⁷. Der erste Summand entspricht der Korrektur in führender Ordnung der angewandten Störungstheorie (vgl. Gl. (5.34)) und weist für den Full-Twist keine $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung auf. Lediglich für die Wahl $\omega = \pi$ verschwinden die linearen Gitterterme. Der nächstführende Ausdruck hat insgesamt $D = 4$ und zeigt sowohl eine physikalische Korrektur

³⁷ Redundante Terme der Ordnung $\mathcal{O}(a^3)$, die sich beim Ausmultiplizieren des zweiten Terms ergeben würden, sind hier wegen der Übersichtlichkeit mit enthalten

auf, die im Kontinuumslimit bestehen bleibt, als auch weitere Fehlerterme in der Gitterkonstanten, die unabhängig vom Twist-Winkel sind. Darüber hinaus ist die NLO-Korrektur mit $\mathcal{O}(10^{-8})$ nochmals drei Größenordnungen kleiner, als der Term führender Ordnung mit $\mathcal{O}(10^{-5})$.

$$\begin{aligned}
\Delta_{\pi\eta} = & \frac{B_0(m_d - m_u)^2}{2m_s - m_u - m_d} \left[1 - \frac{2aW_0(1 - \cos(\omega)) - \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u+m_d)}}{B_0(2m_s - m_u - m_d)} + \frac{4a^2W_0^2(1 - \cos(\omega))^2}{B_0^2(2m_s - m_u - m_d)^2} \right] \\
& - \left[\frac{m_d - m_u}{2m_s - m_u - m_d} \right]^2 \\
& \cdot \left[1 - \frac{4aW_0(1 - \cos(\omega)) - \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u+m_d)}}{B_0(2m_s - m_u - m_d)} + \frac{12a^2W_0^2(1 - \cos(\omega))^2}{B_0^2(2m_s - m_u - m_d)^2} \right] \\
& \cdot \left[\frac{16B_0^2}{F_0^2} \frac{1}{3} \left[(3L_4 + 2L_5 - 6L_6 + 3L_7 - 3L_8) [m_u^2 + m_d^2] \right. \right. \\
& \quad + (-2L_4 - L_5 + 4L_6 + 4L_8) m_s^2 \\
& \quad + (6L_4 - 4L_5 - 12L_6 + 6L_7 - 6L_8) m_u m_d \\
& \quad \left. + (-3L_4 - 2L_5 + 6L_6 - 12L_7) [m_u + m_d] m_s \right] \\
& + \frac{16aW_0B_0}{F_0^2} \frac{1}{3} \left[(-6L_4 - L_5 + 3W_4 - W_5 + 3W_6 - 6W_7) [m_u + m_d] \right. \\
& \quad + (-6L_4 - 4L_5 - 6W_4 - 4W_5 + 12W_6 + 12W_7 + 12W_8) m_s \\
& \quad + (6L_4 + 4L_5 + 6W_4 + 4W_5 \\
& \quad \quad - 12W_6 + 6W_7 - 6W_8) [m_u + m_d] \cos(\omega) \\
& \quad \left. + (6L_4 - 2L_5 - 12W_4 - 2W_5 + 6W_6 - 12W_7) m_s \cos(\omega) \right] \\
& + \frac{32a^2W_0^2}{F_0^2} \frac{1}{3} \left[3W_4 + 2W_5 + 6W_7' \right. \\
& \quad + (-3W_4 - 2W_5 + 6W_6' - 12W_7') \cos(\omega) \\
& \quad + (-6W_6' + 6W_7') \cos^2(\omega) \\
& \quad + (9L_4 - 6L_6 + 12L_7 \\
& \quad \quad \left. - 12W_4 - 2W_5 + 6W_6 - 12W_7) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \right]
\end{aligned}$$

(5.72)

5.2.3. Schleifenrechnung und dimensionale Regularisierung

Betrachtet man das Weinberg'sche Zählschema bis zur chiralen Dimension $D = 4$, wird deutlich, dass in nächstführender Ordnung neben den Kontaktbeiträgen, die in die Treelevel-Massen absorbiert wurden, Schleifenbeiträge zur Selbstenergie und damit zu den Mesonenmassen beitragen (s. Tab. 3.1). Um die Massen vollständig zu bestimmen und die Theorie zu renormieren, müssen diese berechnet werden. Zur Ermittlung der Schleifenkorrekturen nächstführender Ordnung werden die betreffenden Wechselwirkungsterme

durch Entwicklung der effektiven Lagrangedichte führender Ordnung bestimmt. Nach Gl. 5.1 bietet sich auch hier zunächst eine formale Unterteilung gemäß

$$\mathcal{L}_{\text{LO}}^{\text{WW}} = \mathcal{L}_{\text{LO,der}}^{\text{WW}} + \mathcal{L}_{\text{LO,sb}}^{\text{WW}} \quad (5.73)$$

in derivative und symmetriebrechende Anteile an. Da es sich bei dem relevanten Diagramm um einen 4-Vertex handelt, muss die Lagrangedichte bis zur quadrilinearen Ordnung in den Feldern bzw. deren Ableitungen entwickelt werden. Der derivative Term ist invariant unter Transformation zur optimierten Parametrisierung (Gl. (5.39)), sodass sich direkt

$$\mathcal{L}_{\text{LO,der}}^{\text{WW}} = -\frac{1}{6F_0^2} \sum_{a,b,c,d=1}^8 f_{abe} f_{cde} \phi_a (\partial_\mu \phi_b) \phi_c (\partial_\mu \phi_d) \quad (5.74)$$

ergibt (s. Rg. (XVI.a) u. [1,37]). Für den symmetriebrechenden Anteil werden die Felder ebenfalls in der optimierten Parametrisierung eingesetzt. Neben den expliziten Termen $\tilde{\rho}$ und ρ_0 durch das Gitterspurion treten hier durch den Twisted-Mass-Formalismus und die damit verbundene Verschiebung des Minimums Korrekturen in ρ_3 auf, die wie üblich bis zur quadratischen Ordnung in der Gitterkonstanten entwickelt werden. Nach Rg. (XVI.b) ergibt sich über die Spurrelationen insgesamt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{LO,sb}}^{\text{WW}} = & \frac{1}{24F_0^2} \left[-\frac{1}{3} \left[(2\tilde{\rho} + \rho_0) + (2\hat{\chi} + \chi_s) \right] \delta_{ab} \delta_{cd} - \frac{\Delta\chi}{3} [2\delta_{d1} d_{abc} + 3\delta_{ab} d_{cd1}] \right. \\ & + \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[(\rho_0 - \tilde{\rho}) + (\chi_s - \hat{\chi}) \right] [2\delta_{d8} d_{abc} + 3\delta_{ab} d_{cd8}] \\ & \left. - \frac{\rho_3^2}{6\hat{\chi}} \left[\delta_{ab} \delta_{cd} + 2d_{338} [\delta_{d8} d_{abc} + 3\delta_{ab} d_{cd8}] \right] \right] \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d + \mathcal{O}(a^3). \quad (5.75) \end{aligned}$$

Die betreffende Selbstwechselwirkung kann also wie gefordert über ein einzelnes Schleifendiagramm mit 4-Vertex beschrieben werden. Dieser Umstand ist der speziellen Form der Parametrisierung (Gl. (5.39)) zu verdanken. Der in Kap. 5.1.3 erwähnte naive Ansatz würde zu trilinearen Feldtermen und damit zu zusätzlichen 3-Vertices führen [34]. Der Vertex \mathcal{V} hat die in Abb. 5.1 dargestellte allgemeine Form:

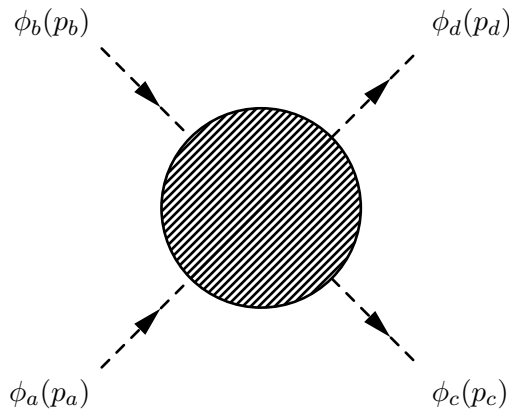


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des Selbstwechselwirkungs-Vertex

Die Feynman-Regeln für den dargestellten Vertex lassen sich analog zur ϕ^4 -Theorie aus der Gesamtwechselwirkung der Lagrangedichte zu

$$\mathcal{V}_{abcd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d = i4! \mathcal{L}_{\text{LO}}^{\text{WW}} \quad (5.76)$$

ablesen [39]. Der Geometriefaktor $4!$ stammt aus der Anzahl möglicher Permutationen zur Positionierung der vier äußeren Beine. Der gefundene Vertex beschreibt im Wesentlichen

eine Zwei-Teilchen-Streuung der Form

$$\phi_a(p_a) + \phi_b(p_b) \rightarrow \phi_c(p_c) + \phi_d(p_d). \quad (5.77)$$

Zur Berechnung der Schleifenbeiträge muss die Lagrangedichte bzgl. der Indices symmetrisiert werden. Dies wird nun beispielhaft für den derivativen Anteil durchgeführt:

Da die spätere Berechnung der Diagramme im Impulsraum vorgenommen wird, werden die Felder zunächst *Fourier-transformiert*, sodass

$$\partial_\mu \phi_a \rightarrow i p_a \phi_a \quad (5.78a)$$

$$\Rightarrow -f_{abe} f_{cde} \phi_a (\partial_\mu \phi_b) \phi_c (\partial_\mu \phi_d) \rightarrow p_b p_d f_{abe} f_{cde} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d. \quad (5.78b)$$

Um ein *symmetrisches Verhalten bzgl. der Impulse* zu erhalten, folgt die Ersetzung

$$p_b p_d f_{abe} f_{cde} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \rightarrow \frac{1}{4} (p_a - p_b)(p_d - p_c) f_{abe} f_{cde} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d, \quad (5.79)$$

sodass sich nach zusätzlicher *Symmetrisierung der Parametrisierung* folgendes Endergebnis für den nun totalsymmetrischen derivativen Selbstwechselwirkungsterm

$$\begin{aligned} v^{(1)} \mathcal{V}_{abcd}^{(1)} = \frac{i4!}{6F_0^2} \frac{1}{12} & \left[(p_a - p_b)(p_c - p_d) f_{abe} f_{cde} \right. \\ & \left. + (p_a - p_c)(p_b - p_d) f_{ace} f_{bde} + (p_a - p_d)(p_b - p_c) f_{ade} f_{bce} \right] \quad (5.80) \end{aligned}$$

ergibt, wobei die Wick-Rotation im Impulsraum zunächst vernachlässigt wurde und später an geeigneten Stellen der Rechnung eingeführt wird. Der so definierte Term verhält sich folglich symmetrisch unter Vertauschung der Indices bzw. der äußeren Beine im Diagramm in Abb. 5.1. Wendet man ein Analoges Verfahren auf die verbleibenden Terme in Gl. (5.75) an, ergibt sich nach Addition insgesamt folgender Ausdruck für den Vertex:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{abcd} = \frac{i}{3F_0^2} & \left[(p_a - p_b)(p_c - p_d) f_{abe} f_{cde} \right. \\ & \left. + (p_a - p_c)(p_b - p_d) f_{ace} f_{bde} + (p_a - p_d)(p_b - p_c) f_{ade} f_{bce} \right] \\ & - \frac{i}{9F_0^2} \left[2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0 \right] \left[\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc} \right] \\ & + \frac{i}{6\sqrt{3}F_0^2} \left[\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho} \right] \left[\delta_{d8} d_{abc} + \delta_{c8} d_{abd} + \delta_{b8} d_{adc} + \delta_{a8} d_{dbc} \right. \\ & \quad \left. + \delta_{ab} d_{cd8} + \delta_{ac} d_{bd8} + \delta_{ad} d_{cb8} \right. \\ & \quad \left. + \delta_{bc} d_{ad8} + \delta_{db} d_{ca8} + \delta_{cd} d_{ab8} \right] \\ & - \frac{i}{18F_0^2} \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} \left[\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc} + \frac{3}{2} d_{338} \left[\delta_{d8} d_{abc} + \delta_{c8} d_{abd} + \delta_{b8} d_{adc} + \delta_{a8} d_{dbc} \right] \right. \\ & \quad \left. + 3d_{338} \left[\delta_{ab} d_{cd8} + \delta_{ac} d_{bd8} + \delta_{ad} d_{cb8} + \delta_{bc} d_{ad8} + \delta_{db} d_{ca8} + \delta_{cd} d_{ab8} \right] \right] \\ & - \frac{i}{6F_0^2} \Delta \chi \left[\delta_{d1} d_{abc} + \delta_{c1} d_{abd} + \delta_{b1} d_{adc} + \delta_{a1} d_{dbc} \right. \\ & \quad \left. + \delta_{ab} d_{cd1} + \delta_{ac} d_{bd1} + \delta_{ad} d_{cb1} + \delta_{bc} d_{ad1} + \delta_{db} d_{ca1} + \delta_{cd} d_{ab1} \right] + \mathcal{O}(a^3). \quad (5.81) \end{aligned}$$

Im Kontinuumslimit und unter Berücksichtigung der Parametrisierung sowie der Euklidischen Metrik entspricht dieses Zwischenergebnis dem in der Arbeit von K. Walter errechneten Vertex (s. [38]) und den Angaben zur Mesonen-Streuung in [1]. Die Vorfaktoren, die nach Tab. 3.1 von chiraler Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$ sind, nehmen im Wesentlichen die Rolle von

Fallunterscheidung bzgl. der möglichen Mischungen ermittelt³⁸:

- **Ohne** Mischung der äußeren Beine - **Ohne** Mischung in der Schleife ($a = d, b = c$)

Der Vertex nimmt für die betreffende Wahl der Indices folgende Form an:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{abba} = \frac{i}{2F_0^2} & \left[-\frac{2}{3}(p^2 + k^2)f_{abc}f_{abe} \right. \\ & - \frac{1}{9} \left[2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0 \right] [2\delta_{ab}^2 + 1] \\ & + \frac{1}{6\sqrt{3}} \left[\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho} \right] [2\delta_{a8}d_{abb} + 2\delta_{b8}d_{aab} \\ & \qquad \qquad \qquad + 4\delta_{ab}d_{ab8} + d_{bb8} + d_{aa8}] \\ & - \frac{1}{18} \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} \left[2\delta_{ab}^2 + 1 + 3d_{338} [\delta_{a8}d_{abb} + \delta_{b8}d_{aab}] \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + 3d_{338} [4\delta_{ab}d_{ab8} + d_{bb8} + d_{aa8}] \right] + \mathcal{O}(a^3). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Das Ergebnis entspricht unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Implementierung von $\Delta\chi$ dem Ausdruck aus [38].

- **Ohne** Mischung der äußeren Beine - **Mit** Mischung in der Schleife ($a = d, b \neq c$)

Die Mischung in der Schleife wird durch die nichtdiagonalen Elemente im Propagator führender Ordnung induziert und treten im π^0 - η - sowie im Kaonen-Sektor auf. Für den Vertex ergibt sich hier:

$$\mathcal{V}_{abca} = \mathcal{V}_{acba} = \frac{i}{2F_0^2} \left[-\frac{1}{6}\Delta\chi [2\delta_{a1}d_{abc} + d_{cb1} + \delta_{b1}\delta_{c8}d_{aa8} + 2\delta_{ab}d_{ca1}] \right] + \mathcal{O}(a^3). \quad (5.87)$$

Bei der Berechnung wurden Mischterme, denen kein korrespondierender Propagator führender Ordnung zugeordnet werden kann, automatisch vernachlässigt. Außerdem wurde die Invarianz unter Vertauschung von b und c gefordert.

- **Mit** Mischung der äußeren Beine - **Ohne** Mischung in der Schleife ($a \neq d, b = c$)

Eine Betrachtung der geforderten Beziehungen zwischen den Indices ergibt:

$$\mathcal{V}_{abbd} = \mathcal{V}_{dbba} = \frac{i}{2F_0^2} \left[-\frac{1}{6}\Delta\chi [\delta_{a1}d_{abb} + 2\delta_{b1}d_{abd} + 2\delta_{ab}d_{bd1} + d_{ad1}] \right] + \mathcal{O}(a^3). \quad (5.88)$$

Bei Mischtermen bzgl. der äußeren Beine a und d sind Terme, die keine Entsprechung im Treelevel-Propagator haben, nicht zu erwarten, sodass auch hier nur Mischungen im π_1 - η_8 - sowie K_4 - K_6 - bzw. K_5 - K_7 -Sektor zulässig sind. Dies ist in Abb. 5.3 wie folgt zu begründen: Für die Summanden mit Schleifenbeitrag muss jeweils ein korrespondierender Beitrag aus dem ersten Term bzw. dem Treelevel-Propagator auftreten, damit die Summation in Gl. (5.83) sinnvoll ist.

³⁸ Anders als im Fall des Vertex in Abb. 5.1, der einen reinen Streuprozess beschreibt, werden hier zwei äußere Beine zu einer Schleife verknüpft, sodass sich die Anzahl der möglichen Feldpermutationen von $4! = 24$ auf 12 reduziert und für jeden der vier Beiträge ein Geometriefaktor $\frac{1}{2}$ eingefügt werden muss

- **Mit** Mischung der äußeren Beine - **Mit** Mischung in der Schleife ($a \neq d, b \neq c$)

Mit einer zum obigen Fall analogen Beschränkung der inneren und äußeren Mischungen bleiben folgende Terme für den betreffenden Vertex gültig:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{abcd} = \frac{i}{2F_0^2} & \left[-\frac{1}{3}(p^2 + k^2)[f_{abe}f_{dce} + f_{ace}f_{dbe}] \right. \\
& - \frac{1}{9}[2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0][\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd}] \\
& + \frac{1}{6\sqrt{3}}[\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}][\delta_{a1}\delta_{d8}d_{1bc} + \delta_{b1}\delta_{c8}d_{ad1} + \delta_{c1}\delta_{b8}d_{ad1} \\
& \quad + \delta_{a8}\delta_{d1}d_{bc1} \\
& \quad + \delta_{ab}d_{cd8} + \delta_{ac}d_{bd8} + \delta_{db}d_{ca8} + \delta_{cd}d_{ab8}] \\
& - \frac{1}{18}\frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} \left[\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \frac{3}{2}d_{338}[\delta_{d8}d_{abc} + \delta_{c8}d_{abd} + \delta_{b8}d_{adc} + \delta_{a8}d_{dbc}] \right. \\
& \quad \left. + 3d_{338}[\delta_{ab}d_{cd8} + \delta_{ac}d_{bd8} + \delta_{db}d_{ca8} + \delta_{cd}d_{ab8}] \right] \Big] + \mathcal{O}(a^3).
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Die Selbstenergie in Minkowski-Metrik ist mit den so definierten Vertex-Beiträgen durch

$$-i\Sigma_{ad}^S = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathcal{V}_{abcd} G_{bc}(k^2) \tag{5.90}$$

gegeben. Die Diagonalelemente im Propagator führender Ordnung haben für die geladenen Pionen bspw. die einfache Gestalt

$$G_{aa}(k^2) = \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2}. \tag{5.91}$$

Die nichtdiagonalen Komponenten finden sich im π^0 - η - sowie im Kaonen-Sektor und ergeben sich gemäß der Vorschrift

$$iG_{bc}^{-1}(k^2) = \delta_{bc}k^2 + \mathfrak{M}_{\text{LO},bc} \tag{5.92}$$

aus der Massenmatrix. Mit den Ergebnissen aus Kap. 5.1.2 findet sich somit für den Pion-Eta-Fall

$$iG_{\pi\eta}^{-1}(k^2) = \begin{pmatrix} k^2 + \bar{m}_\pi^2 & \frac{B_0}{\sqrt{3}}(m_d - m_u) \\ \frac{B_0}{\sqrt{3}}(m_d - m_u) & k^2 + \bar{m}_\eta^2 \end{pmatrix}. \tag{5.93}$$

Nach Invertierung erhalten die Diagonalelemente in diesem Sektor analog zu den LO-Massen eine Korrektur der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m^2)$, durch die eine ganze Reihe zusätzlicher Terme (s. Rg. (XVII)) auftreten und die spätere Diagonalisierung der Massenmatrix deutlich verkomplizieren. Weitergehend tauchen wie in Rg. (XVII) erkennbar quadratische Propagatoren auf, aufgrund derer auch die zu behandelnden Schleifenintegrale an Umfang gewinnen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit und physikalischen Anschaulichkeit werden in den Schleifenkorrekturen des betreffenden Sektors Terme quadratischer u-d-Massendifferenz folglich vernachlässigt, sodass

$$G_{11,88}(k^2) = \frac{i}{k^2 + \bar{m}_{\pi,\eta}^2} + \mathcal{O}(\Delta m^2).$$

Die nichtdiagonalen Elemente des Propagators im betreffenden Sektor weisen eine lineare

Korrektur in Δm auf:

$$\begin{aligned}
G_{18,81}(k^2) &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \frac{B_0(m_d - m_u)}{(k^2 - \bar{m}_\pi^2)(k^2 - \bar{m}_\eta^2)} + \mathcal{O}(\Delta m^3) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{B_0(m_d - m_u)}{\bar{m}_\eta^2 - \bar{m}_\pi^2} \left[\frac{i}{k^2 + \bar{m}_\eta^2} - \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^3) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_d - m_u}{2m_s - m_u - m_d} \left[\frac{i}{k^2 + \bar{m}_\eta^2} - \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} \right] g_{\pi\eta}(a, a^2) + \mathcal{O}(\Delta m^3, a^3).
\end{aligned} \tag{5.94b}$$

Dabei wird der durch das Gitter implizierte Korrekturterm, der schon für die Treelevel-Massen führender (s. Gl. (5.34)) und nächstführender (s. Gl. (5.72)) Ordnung auftritt, bis zur Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ entwickelt und wie folgt zusammengefasst:

$$g_{\pi\eta}(a, a^2) := 1 - \frac{2aW_0(1 - \cos(\omega)) - \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)}}{B_0(2m_s - m_u - m_d)} + \frac{4a^2W_0^2(1 - \cos(\omega))^2}{B_0^2(2m_s - m_u - m_d)^2}. \tag{5.94c}$$

Der zweite Schritt folgt aus einer Partialbruchzerlegung und Entwicklung in der Gitterkonstanten bis zur Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ analog zur Diagonalisierung der Massenmatrix (s. Gl. (5.34)). Für die Kaonen ergibt sich weitergehend

$$G_{46,64}(k^2) = G_{57,75}(k^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{i}{k^2 + m_{K_6, K_7}^2} - \frac{i}{k^2 + m_{K_4, K_5}^2} \right] \tag{5.95a}$$

$$\text{und} \quad G_{44,66}(k^2) = G_{55,77}(k^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{i}{k^2 + m_{K_6, K_7}^2} + \frac{i}{k^2 + m_{K_4, K_5}^2} \right]. \tag{5.95b}$$

In diesem Fall kann die u-d-Massendifferenz nach Partialbruchzerlegung in die Propagatormassen absorbiert werden.

Da die impulsabhängigen Anteile der Propagatoren stets die klassische Form aufweisen und die Vertex-Beiträge konstant bzw. proportional zu k^2 sind, ergeben sich nach Gl. (5.90) i.A. zwei Arten zu berechnender Integrale:

$$I(m_\phi^2) := \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_\phi^2} \tag{5.96a}$$

$$\text{und} \quad I'(m_\phi^2) := \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-k^2}{k^2 + m_\phi^2}. \tag{5.96b}$$

Für allgemeine Raum-Zeit-Dimensionen n , die nun im Euklidischen Raum mit der üblichen Wick-Rotation (Gl. (4.3)) definiert sind, nimmt das erste Integral folgende Form an:

$$I(m_\phi^2, n) = \Lambda^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 + m_\phi^2}. \tag{5.97}$$

Dabei hat Λ die Einheit des Impulses und nimmt im späteren Verlauf die Rolle einer Renormierungsskala ein. Des Weiteren hat das Integral $I(m_\phi^2, n)$ in dieser Form eine von n unabhängige Dimension. Zur Auswertung werden zunächst n -dimensionale *Kugelkoordinaten* eingeführt, sodass

$$\int d^n k = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty k^{n-1} dk. \tag{5.98}$$

$\Gamma(\frac{n}{2})$ stellt dabei die *Gamma-Funktion* dar (s. [40]), die sich nach App. G aus den Winke-

lanteilen ergibt. Das gesamte Integral ist somit auf den Impulsbetrag reduziert und gegeben durch

$$\begin{aligned}
I(m_\phi^2, n) &= \Lambda^{4-n} \frac{2}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{k^{n-1}}{k^2 + m_\phi^2} dk \\
&= \Lambda^{4-n} \frac{2}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{m_\phi^2} \int_0^\infty \frac{k^{n-1}}{\frac{k^2}{m_\phi^2} + 1} dk \\
&= \Lambda^{4-n} \frac{(m_\phi^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{t+1} dt, \tag{5.99}
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \frac{k^2}{m_\phi^2} =: t. \tag{5.100}$$

Das so gefundene Integral kann durch die Beta-Funktion (s. Gl. (G.5)) ausgewertet werden. Für $x = \frac{n}{2}$ und $y = 1 - \frac{n}{2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
I(m_\phi^2, n) &= \Lambda^{4-n} \frac{(m_\phi^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} B\left(\frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}\right) \\
&= \Lambda^{4-n} \frac{(m_\phi^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right). \tag{5.101}
\end{aligned}$$

Im Fall von $n = 4$ Dimensionen, d.h. $I(m_\phi^2, n) \sim \Gamma(-1)$, divergiert dieser Ausdruck, sodass eine Entwicklung vorgenommen werden muss, um ein physikalisch korrektes Integral zu erhalten. Für diesen Vorgang der *Dimensionalen Regularisierung* der Unendlichkeiten, wird eine Größe $\varepsilon = 4 - n$ eingeführt, sodass der gesamte Term um $\varepsilon = 0$ entwickelt werden kann. Die Substitution ergibt

$$\begin{aligned}
I(m_\phi^2, \varepsilon) &= (\Lambda^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{(m_\phi^2)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{(4\pi)^{2-\frac{\varepsilon}{2}}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right) \\
&= \frac{m_\phi^2}{16\pi^2} (4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}} \left[\frac{\Lambda^2}{m_\phi^2} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right)}{\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right)}. \tag{5.102}
\end{aligned}$$

Verwendet man die Entwicklungen

$$a^x = 1 + \ln(a)x + \mathcal{O}(x^2), \tag{5.103a}$$

$$\frac{1}{x-1} = -(x+1) + \mathcal{O}(x^2) \tag{5.103b}$$

$$\text{und } \Gamma(x+1) = \Gamma(1) + \underbrace{\Gamma'(1)}_{:=\gamma_E} x + \mathcal{O}(x^2), \tag{5.103c}$$

findet sich in erster Ordnung

$$I(m_\phi^2) = \frac{m_\phi^2}{16\pi^2} \left[\ln \left[\frac{m_\phi^2}{\Lambda^2} \right] + \mathfrak{R} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right], \tag{5.104}$$

$$\text{mit } \mathfrak{R} = \frac{2}{\varepsilon} - \ln(4\pi) - \gamma_E - 1 = \text{const.} \tag{5.104a}$$

Der Ausdruck \mathfrak{R} ist offensichtlich für $\varepsilon \rightarrow 0$ bzw. für ein physikalisches vierdimensionales Integral divergent, kann aber als konstante Größe vollständig isoliert werden. Der Wert γ_E entspricht der sog. *Euler'schen Konstanten* und stellt die Ableitung der Gamma-

Funktion $\Gamma'(1) \approx 0,5722 = \gamma_E$ an der Stelle 1 dar [40].

Das zweite zu betrachtende Integral in Gl. (5.96b) kann analog zum ersten durch Einsetzen einer Null im Zähler auf folgende Weise geschrieben werden:

$$I'(m_\phi^2, n) = \Lambda^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{-(k^2 + m_\phi^2 - m_\phi^2)}{k^2 + m_\phi^2}. \quad (5.105)$$

Bei der späteren Rechnung ist das negative Vorzeichen bedingt durch die Wick-Rotation zu beachten. Der Bruch kann weitergehend in einen konstanten und einen von k^2 abhängigen Anteil zerlegt werden. Nach [1] gilt darüber hinaus

$$i\Lambda^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \sim \frac{1}{\Gamma(0)} = 0, \quad (5.106)$$

$$\text{sodass} \quad I'(m_\phi^2) = m_\phi^2 I(m_\phi^2). \quad (5.107)$$

Die Diagonalelemente der Schleifenbeiträge aus den Vertices ohne Mischung in den äußeren Beinen ergeben sich aus den Vertex-Beiträgen in Gl. (5.86) und (5.87). Nach Einsetzen der betreffenden Propagatoren und Anwendung der Integralformel (5.107) ergibt sich:

$$a_{\pi_1}^S = \frac{\bar{m}_\pi^2}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{6} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{6} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{6} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{6} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3), \quad (5.108a)$$

$$b_{\pi_1}^S = -\frac{1}{F_0^2} \left[\frac{2I(\bar{m}_\pi^2)}{3} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{6} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{6} \right] + \mathcal{O}(a^3), \quad (5.108b)$$

$$a_{\pi_2, \pi_3}^S = \frac{\bar{m}_\pi^2}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{6} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{6} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{6} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{6} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3), \quad (5.109a)$$

$$b_{\pi_2, \pi_3}^S = -\frac{1}{F_0^2} \left[\frac{2I(\bar{m}_\pi^2)}{3} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{6} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{6} \right] + \mathcal{O}(a^3), \quad (5.109b)$$

$$a_{K_4, K_5}^S = \frac{\bar{m}_K^2}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{6} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{3} - \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{12} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3), \quad (5.110a)$$

$$b_{K_4, K_5}^S = -\frac{1}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{6} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{3} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{4} \right] + \mathcal{O}(a^3), \quad (5.110b)$$

$$a_{K_6, K_7}^S = \frac{\bar{m}_K^2}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{3} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{6} - \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{12} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3), \quad (5.111a)$$

$$b_{K_6, K_7}^S = -\frac{1}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{3} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{6} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{4} \right] + \mathcal{O}(a^3), \quad (5.111b)$$

$$a_{\eta_8}^S = \frac{\bar{m}_\eta^2}{F_0^2} \left[\frac{2I(\bar{m}_\eta^2)}{3} \right] + \frac{\bar{m}_\pi^2}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{2} - \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{6} - \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{6} - \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{6} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3), \quad (5.112a)$$

$$b_{\eta_8}^S = -\frac{1}{F_0^2} \left[\frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{2} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{2} \right] + \mathcal{O}(a^3). \quad (5.112b)$$

Im Fall der exakten Isospin-Symmetrie gilt

$$I(m_{K_4, K_5}^2) \rightarrow I(m_{K_6, K_7}^2) = I(\bar{m}_K^2). \quad (5.113)$$

Es zeigt sich, dass das Ergebnis für diesen Grenzfall in die Schleifenkorrekturen in der Arbeit von T. Sudmann (s. [34]) übergehen. Berücksichtigt man den Übergang zur Euklidischen Metrik, erhält K. Walter in seiner Kontinuumsrechnung (s. [38]) analoge Ergebnisse.

Die Terme abhängig von Δm sind aufgrund der unterschiedlichen Parametrisierung der Quarkmassenmatrix an dieser Stelle nicht direkt vergleichbar.

Die nichtdiagonalen Elemente werden durch die in Gl. (5.88) und (5.89) gegebenen Ausdrücke berechnet. Im Gegensatz zu den obigen Beiträgen tragen die nichtdiagonalen π^0 - η -Propagatoren in diesem Fall Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m)$ bei. Man findet insgesamt

$$a_{18,81}^S = \frac{1}{\sqrt{3}F_0^2} \left[\left[\frac{4\bar{m}_K^2}{6} - \frac{\bar{m}_\pi^2}{6} \right] \left[I(m_{K_4, K_5}^2) - I(m_{K_6, K_7}^2) \right] \right. \\ \left. + \frac{\bar{m}_\pi^2(m_d - m_u)}{2m_s - m_u - m_d} g_{\pi\eta}(a, a^2) \left[\frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{2} - \frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{2} \right] \right] \\ + \frac{B_0(m_d - m_u)}{\sqrt{3}F_0^2} \left[\frac{5I(\bar{m}_\pi^2)}{6} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{12} \right. \\ \left. + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{12} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{6} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3), \quad (5.114a)$$

$$b_{18,81}^S = -\frac{1}{\sqrt{3}F_0^2} \left[\frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{2} - \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{2} \right] + \mathcal{O}(a^3), \quad (5.114b)$$

$$a_{46,64}^S = a_{57,75}^S = \frac{1}{F_0^2} \left[\frac{m_d - m_u}{2m_s - m_u - m_d} g_{\pi\eta}(a, a^2) \left[\left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{6} + \frac{\bar{m}_K^2}{12} \right] I(\bar{m}_\pi^2) \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{12} - \frac{\bar{m}_K^2}{12} - \frac{\bar{m}_\eta^2}{4} \right] I(\bar{m}_\eta^2) \right] \right] \\ + \frac{B_0(m_d - m_u)}{F_0^2} \left[\frac{5I(\bar{m}_\pi^2)}{24} + \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{8} + \frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{8} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{24} \right] \\ + \frac{\bar{m}_K^2}{F_0^2} \left[\frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{12} - \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{12} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3), \quad (5.115a)$$

$$b_{46,64}^S = b_{57,75}^S = -\frac{1}{F_0^2} \left[\frac{m_d - m_u}{2m_s - m_u - m_d} g_{\pi\eta}(a, a^2) \left[\frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{4} - \frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} \right] \right] \\ - \frac{1}{F_0^2} \left[\frac{I(m_{K_6, K_7}^2)}{12} - \frac{I(m_{K_4, K_5}^2)}{12} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3). \quad (5.115b)$$

Wie erwartet, verschwinden die nichtdiagonalen Terme für gleiche up- und down-Massen, sodass das Ergebnis auch in diesem Fall mit der Arbeit von Sudmann übereinstimmt. Weitergehend stellt sich bei den Berechnungen heraus, dass keine weitere Mischungen zu denen führender Ordnungen auftreten. Ein direkter Vergleich mit dem Ergebnis von Walter ist aus den oben genannten Gründen kaum möglich.

Wie in App. H beschrieben, werden die Unendlichkeiten der Schleifenintegrale in Gl. (5.104) über das $\overline{\text{MS}}$ -Scheme in die Normierung der Entwicklungskoeffizienten nächstführender Ordnung absorbiert, sodass sich

$$I(m_\phi^2) \rightarrow \frac{m_\phi^2}{16\pi^2} \ln \left[\frac{m_\phi^2}{\Lambda^2} \right] \quad (5.116)$$

ergibt. Bevor der nun vollständig definierte NLO-Propagator im folgenden Kapitel diagonalisiert wird, werden Integrale im Kaonen-Sektor bis zur zweiten Ordnung in Δm entwickelt:

$$I(m_{K_4, K_5}^2) = I(\bar{m}_K^2) - \frac{B_0(m_d - m_u)}{32\pi^2} \left[\ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] + 1 \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2), \quad (5.117a)$$

$$I(m_{K_6, K_7}^2) = I(\bar{m}_K^2) + \frac{B_0(m_d - m_u)}{32\pi^2} \left[\ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] + 1 \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2). \quad (5.117b)$$

5.2.4. Diagonalisierung des Propagators und One-Loop-Massen

Der Mesonenpropagator nächstführender Ordnung kann in optimierter Parametrisierung inkl. der oben bestimmten Schleifenkorrekturen nach Gl. (5.84) in Matrixschreibweise und inverser Darstellung insgesamt mit

$$\begin{aligned} iG^{-1}(p^2) &= p^2 \mathbb{1} + \mathfrak{M} - (a^S - p^2 b^S) \\ &:= p^2 (\mathbb{1} + b^S) + (\mathfrak{M} - a^S) \end{aligned} \quad (5.118)$$

angegeben werden. Dabei ist \mathfrak{M} die in Kap. 5.2.2 vollständig bestimmte Treelevel-Massenmatrix und a^S bzw. b^S sind die im vorherigen Kapitel berechneten Matrizen der One-Loop-Korrekturen.

Eine *Simultane Diagonalisierung*, d.h. die Möglichkeit, die Matrizen a^S und b^S mit Hilfe einer gemeinsamen Transformationsmatrix auf Diagonalgestalt zu bringen, ist in diesem Fall nicht möglich. Dies begründet sich nach [41] auf der Tatsache, dass die Schleifenmatrizen nicht miteinander vertauschen. Führt man eine Transformationsmatrix R ein, sodass sich bis zur relevanten chiralen Ordnung

$$R^T R := \mathbb{1} + b^S \quad \Rightarrow \quad R = R^T = \mathbb{1} + \frac{b^S}{2} + \mathcal{O}(p^4) \quad (5.119)$$

ergibt, kann der Propagator wie folgt umgeschrieben werden:

$$iG^{-1}(p^2) = \left(\mathbb{1} + \frac{b^S}{2} \right) \left[p^2 \mathbb{1} + \mathfrak{M} - a^S - \frac{\{b^S, \mathfrak{M}\}}{2} \right] \left(\mathbb{1} + \frac{b^S}{2} \right) + \mathcal{O}(p^6). \quad (5.120)$$

Dies entspricht im Wesentlichen dem schon bekannten Renormierungsverfahren bzgl. der Verschiebung des Minimums im Kapitel zur führenden Ordnung bzw. der Matrixmultiplikation zur Bestimmung der Massenmatrix in Kap. 5.2.2. Über die bekannten Drehoperationen zur Diagonalisierung von \mathfrak{M} , die sich zur Gesamtmatrix O zusammensetzen, lässt sich der Treelevel-Anteil des Propagators diagonalisieren, sodass der renormierte Propagator schließlich durch

$$iG^{-1}(p^2) = RO \left[p^2 \mathbb{1} + M^2 - O^T a^S O - \frac{\{O^T b^S O, m^2\}}{2} \right] O^T R^T + \mathcal{O}(p^6) \quad (5.121)$$

gegeben ist. Die neue zu diagonalisierende Massenmatrix liest sich folglich zu

$$\mathring{\mathfrak{M}} = M^2 - \left[\overbrace{O^T a^S O}^{:= \hat{a}^S} + \frac{\overbrace{\{O^T b^S O, m^2\}}^{:= \hat{b}^S}}{2} \right] \quad (5.122)$$

ab. Anschaulich müssen demnach die bekannten Drehmatrizen aus der Treelevel-Diagonalisierung auf die Matrizen a^S und b^S angewandt und der daraus resultierende nichtdiagonale Anteil der Gesamtmatrix diagonalisiert werden.

Die Drehmatrix im π^0 - η -Sektor ruft erneut Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m^2)$ hervor, die in diesem Abschnitt vernachlässigt werden. Im Kaonen-Sektor werden die nichtdiagonalen Elemente von a^S bzw. b^S bedingt durch die spezielle Form der Drehung auf der Diagonalen subtrahiert (vgl. Rg. (XVIII.a)). Nach Berechnung des Antikommutators zeigt sich, dass die Loop-Matrizen in der Summe automatisch Diagonalgestalt haben (s. Rg. (XVIII.b)). Die Massen können demnach mit den Diagonalelementen zu

$$M_\phi^2 = M_\phi^2 - \left[\hat{a}_\phi^S + m_\phi^2 \hat{b}_\phi^S \right]. \quad (5.123)$$

berechnet werden.

Die Mesonenmassen mit One-Loop-Korrektur finden sich nach diesen Überlegungen durch Einsetzen der transformierten Schleifenmatrizen und sind auf den folgenden Seiten explizit bis einschl. zur Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m, a^2)$ in nächstführender Ordnung chiraler Störungstheorie angegeben.

Mesonmassen führender Ordnung bei erfüllter Isospin-Symmetrie

$$\begin{aligned}\bar{m}_\pi^2 &= B_0(m_u + m_d) + 2aW_0 \cos(\omega) + \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} + \mathcal{O}(a^3) \\ \bar{m}_K^2 &= \frac{B_0}{2}(m_u + m_d + 2m_s) + aW_0(1 + \cos(\omega)) + \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} + \mathcal{O}(a^3) \\ \bar{m}_\eta^2 &= \frac{1}{3} \left[B_0(m_u + m_d + 4m_s) + 2aW_0(2 + \cos(\omega)) + \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \right] + \mathcal{O}(a^3)\end{aligned}$$

(5.124)

NLO-Masse des *neutralen Pions* mit One-Loop-Korrektur

$$\begin{aligned}\mathring{M}_{\pi_1}^2 &= B_0(m_u + m_d) \\ &+ \frac{8B_0^2}{F_0^2} \left[(-2L_4^r - L_5^r + 4L_6^r + 2L_8^r) [m_u^2 + m_d^2] \right. \\ &\quad \left. + (-4L_4^r - 2L_5^r + 8L_6^r + 4L_8^r) m_u m_d \right. \\ &\quad \left. + (-2L_4^r + 4L_6^r) [m_u + m_d] m_s \right] \\ &+ 2aW_0 \cos(\omega) \\ &+ \frac{16aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-W_4^r + W_6^r) [m_u + m_d] \right. \\ &\quad \left. + (-2L_4^r - L_5^r - 2W_4^r - W_5^r + 4W_6^r + 2W_8^r) [m_u + m_d] \cos(\omega) \right. \\ &\quad \left. + (-2L_4^r + 2W_6^r) m_s \cos(\omega) \right] \\ &+ \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \\ &+ \frac{32a^2W_0^2}{F_0^2} \left[-2W_4^r - W_5^r \right. \\ &\quad \left. + (-W_4^r + 2W_6^r) \cos(\omega) \right. \\ &\quad \left. + (4W_6^r + 2W_8^r) \cos^2(\omega) \right. \\ &\quad \left. + (-4L_6^r - 2L_8^r + 4W_6^r + 2W_8^r) \sin^2(\omega) \right. \\ &\quad \left. + (-L_4^r - 2L_6^r + 2W_6^r) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \right] \\ &+ \frac{\bar{m}_\pi^2}{32\pi^2 F_0^2} \left[\bar{m}_\pi^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{\Lambda^2} \right] - \frac{\bar{m}_\eta^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3)\end{aligned}$$

(5.125a)

NLO-Masse der *geladenen Pionen* mit One-Loop-Korrektur

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{M}_{\pi_i}^2 &= B_0(m_u + m_d) && i = 2, 3 \\
&+ \frac{8B_0^2}{F_0^2} \left[(-2L_4^r - L_5^r + 4L_6^r + 2L_8^r) [m_u^2 + m_d^2] \right. \\
&\quad + (-4L_4^r - 2L_5^r + 8L_6^r + 4L_8^r) m_u m_d \\
&\quad \left. + (-2L_4^r + 4L_6^r) [m_u + m_d] m_s \right] \\
&+ 2aW_0 \cos(\omega) \\
&+ \frac{16aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-W_4^r + W_6^r) [m_u + m_d] \right. \\
&\quad + (-2L_4^r - L_5^r - 2W_4^r - W_5^r + 4W_6^r + 2W_8^r) [m_u + m_d] \cos(\omega) \\
&\quad \left. + (-2L_4^r + 2W_6^r) m_s \cos(\omega) \right] \\
&+ \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \\
&+ \frac{32a^2W_0^2}{F_0^2} \left[-2W_4^r - W_5^r - 4W_6^r - 2\delta_{i3}W_8^r \right. \\
&\quad + (-W_4^r + 2W_6^r) \cos(\omega) \\
&\quad + (4(1 + \delta_{i3})W_6^r + 2(1 + \delta_{i3})W_8^r) \cos^2(\omega) \\
&\quad + ((1 + \delta_{i3})(-4L_6^r - 2L_8^r + 4W_6^r + 2W_8^r)) \sin^2(\omega) \\
&\quad \left. + (-L_4^r - 2L_6^r + 2W_6^r) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \right] \\
&+ \frac{\bar{m}_\pi^2}{32\pi^2 F_0^2} \left[\bar{m}_\pi^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{\Lambda^2} \right] - \frac{\bar{m}_\eta^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3)
\end{aligned}
\tag{5.125b}$$

NLO-Masse der *geladenen Kaonen* mit One-Loop-Korrektur

$$\begin{aligned}
\mathring{M}_{K_i}^2 &= B_0(m_u + m_s) & i = 4, 5 \\
&+ \frac{2B_0^2}{F_0^2} \left[(-8L_4^r - 3L_5^r + 16L_6^r + 8L_8^r)m_u^2 \right. \\
&\quad + L_5^r m_d^2 \\
&\quad + (-8L_4^r - 4L_5^r + 16L_6^r + 8L_8^r)m_s^2 \\
&\quad + (-8L_4^r - 2L_5^r + 16L_6^r + 8L_8^r)m_u m_d \\
&\quad + (-16L_4^r - 8L_5^r + 32L_6^r + 16L_8^r)m_u m_s \\
&\quad \left. (-8L_4^r + 16L_6^r)m_d m_s \right] \\
&+ aW_0(1 + \cos(\omega)) \\
&+ \frac{4aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-4L_4^r - 2L_5^r - 4W_4^r - 2W_5^r + 8W_6^r + 4W_8^r)m_u \right. \\
&\quad + (-4L_4^r + 4W_6^r)m_d \\
&\quad + (-4L_4^r - 2L_5^r - 4W_4^r - 2W_5^r + 8W_6^r + 4W_8^r)m_s \\
&\quad + (-4L_4^r - 2L_5^r - 8W_4^r - 2W_5^r + 12W_6^r + 4W_8^r)m_u \cos(\omega) \\
&\quad + (-4L_4^r + 4W_6^r)m_d \cos(\omega) \\
&\quad \left. + (-4L_4^r - 2L_5^r - 8W_4^r - 2W_5^r + 12W_6^r + 4W_8^r)m_s \cos(\omega) \right] \\
&+ \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \\
&+ \frac{4a^2W_0^2}{F_0^2} \left[-12W_4^r - 4W_5^r + 8W_6^r \right. \\
&\quad + (-12W_4^r - 4W_5^r + 24W_6^r + 8W_8^r) \cos(\omega) \\
&\quad + (16W_6^r + 8W_8^r) \cos^2(\omega) \\
&\quad + (16W_6^r + 8W_8^r) \sin^2(\omega) \\
&\quad + (8L_6^r + 4L_8^r - 4L_4^r - L_5^r \\
&\quad \quad + 8W_4^r + 2W_5^r - 8W_6^r - 4W_8^r) \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \\
&\quad - 2L_5^r \left[\frac{m_s(m_d - m_u)}{(m_d + m_u)^2} \right] \sin^2(\omega) \\
&\quad + (4L_4^r - 24L_6^r - 8L_8^r \\
&\quad \quad - 16W_4^r - 4W_5^r + 24W_6^r + 8W_8^r) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \left. \right] \\
&+ \frac{\bar{m}_K^2}{32\pi^2 F_0^2} \left[\frac{2\bar{m}_\eta^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] \right] \\
&- \frac{m_d - m_u}{32\pi^2 F_0^2} \frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \bar{m}_K^2 \left[\bar{m}_\eta^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] - \bar{m}_\pi^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{\Lambda^2} \right] \right] \\
&- \frac{B_0(m_d - m_u)}{32\pi^2 F_0^2} \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3)
\end{aligned}$$

NLO-Masse der *neutralen Kaonen* mit One-Loop-Korrektur

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{M}_{K_i}^2 &= B_0(m_d + m_s) & i = 6, 7 \\
&+ \frac{2B_0^2}{F_0^2} \left[(L_5^r - 4L_8^r)m_u^2 \right. \\
&\quad + (-8L_4^r - 3L_5^r + 16L_6^r + 8L_8^r)m_d^2 \\
&\quad + (-8L_4^r - 4L_5^r + 16L_6^r + 16L_8^r)m_s^2 \\
&\quad + (-8L_4^r + 2L_5^r + 16L_6^r + 8L_8^r)m_u m_d \\
&\quad + (-8L_4^r + 16L_6^r)m_u m_s \\
&\quad \left. + (-16L_4^r - 8L_5^r + 32L_6^r + 16L_8^r)m_d m_s \right] \\
&+ aW_0(1 + \cos(\omega)) \\
&+ \frac{4aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-4L_4^r + 4W_6^r)m_u \right. \\
&\quad + (-4L_4^r - 2L_5^r - 4W_4^r - 2W_5^r + 8W_6^r + 4W_8^r)m_d \\
&\quad + (-4L_4^r - 2L_5^r - 4W_4^r - 2W_5^r + 8W_6^r + 8W_8^r)m_s \\
&\quad + (-4L_4^r + 4W_6^r)m_u \cos(\omega) \\
&\quad + (-4L_4^r - 2L_5^r - 8W_4^r - 2W_5^r + 12W_6^r + 4W_8^r)m_d \cos(\omega) \\
&\quad \left. + (-4L_4^r - 2L_5^r - 8W_4^r - 2W_5^r + 12W_6^r + 4W_8^r)m_s \cos(\omega) \right] \\
&+ \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \\
&+ \frac{4a^2W_0^2}{F_0^2} \left[-12W_4^r - 4W_5^r + 8W_6^r \right. \\
&\quad + (-12W_4^r - 4W_5^r + 24W_6^{r'} + 8W_8^{r'}) \cos(\omega) \\
&\quad + (16W_6^{r'} + 8W_8^{r'}) \cos^2(\omega) \\
&\quad + (16W_6^r + 8W_8^r) \sin^2(\omega) \\
&\quad + (-8L_6^r - 4L_8^r + 4L_4^r + L_5^r \\
&\quad \quad - 8W_4^r - 2W_5^r + 8W_6^r + 4W_8^r) \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \\
&\quad + 2L_5 \left[\frac{m_s(m_d - m_u)}{(m_d + m_u)^2} \right] \sin^2(\omega) \\
&\quad + (4L_4^r - 24L_6^r - 8L_8^r \\
&\quad \quad - 16W_4^r - 4W_5^r + 24W_6^r + 8W_8^r) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \left. \right] \\
&+ \frac{\bar{m}_K^2}{32\pi^2 F_0^2} \left[\frac{2\bar{m}_\eta^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] \right] \\
&+ \frac{m_d - m_u}{32\pi^2 F_0^2} \frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \bar{m}_K^2 \left[\bar{m}_\eta^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] - \bar{m}_\pi^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{\Lambda^2} \right] \right] \\
&+ \frac{B_0(m_d - m_u)}{32\pi^2 F_0^2} \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3)
\end{aligned}$$

(5.125d)

NLO-Masse des η -Mesons mit One-Loop-Korrektur

$$\begin{aligned}
\mathring{M}_{\eta_8}^2 = & \frac{1}{3}B_0(m_u + m_d + 4m_s) \\
& + \frac{8B_0^2}{F_0^2} \frac{1}{9} \left[(-6L_4^r - L_5^r + 12L_6^r + 12L_7^r + 6L_8^r) [m_u^2 + m_d^2] \right. \\
& \quad + (-24L_4^r - 16L_5^r + 48L_6^r + 48L_7^r + 48L_8^r) m_s^2 \\
& \quad + (-12L_4^r - 2L_5^r + 24L_6^r + 24L_7^r + 12L_8^r) m_u m_d \\
& \quad \left. + (-30L_4^r - 8L_5^r + 60L_6^r - 48L_7^r) [m_u + m_d] m_s \right] \\
& + \frac{2aW_0(2 + \cos(\omega))}{3} \\
& + \frac{16aB_0W_0}{F_0^2} \frac{1}{9} \left[(-12L_4^r - 2L_5^r - 3W_4^r - 2W_5^r + 15W_6^r - 12W_7^r) [m_u + m_d] \right. \\
& \quad + (-12L_4^r - 8L_5^r - 12W_4^r - 8W_5^r + 24W_6^r + 24W_7^r + 24W_8^r) m_s \\
& \quad + (-6L_4^r - L_5^r - 6W_4^r - W_5^r \\
& \quad \quad + 12W_6^r + 12W_7^r + 6W_8^r) [m_u + m_d] \cos(\omega) \\
& \quad \left. + (-6L_4^r - 4L_5^r - 24W_4^r - 4W_5^r + 30W_6^r - 24W_7^r) m_s \cos(\omega) \right] \\
& + \frac{2a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{3B_0(m_u + m_d)} \\
& + \frac{32a^2W_0^2}{F_0^2} \frac{1}{9} \left[-12W_4^r - 5W_5^r + 12W_6^r + 12W_7^r + 6W_8^r \right. \\
& \quad + (-15W_4^r - 4W_5^r + 30W_6^r - 24W_7^r) \cos(\omega) \\
& \quad + (12W_6^r + 12W_7^r + 12W_8^r) \cos^2(\omega) \\
& \quad + (-12L_6^r - 12L_7^r - 12L_8^r + 12W_6^r + 12W_7^r + 12W_8^r) \sin^2(\omega) \\
& \quad + (9L_4^r - 30L_6^r + 24L_7^r \\
& \quad \quad - 24W_4^r - 4W_5^r + 30W_6^r - 24W_7^r) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \left. \right] \\
& + \frac{\bar{m}_\pi^2}{32\pi^2 F_0^2} \left[-\bar{m}_\pi^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{\Lambda^2} \right] + \frac{2\bar{m}_K^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] + \frac{\bar{m}_\eta^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] \right] \\
& + \frac{\bar{m}_\eta^2}{32\pi^2 F_0^2} \left[2\bar{m}_K^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] - \frac{4\bar{m}_\eta^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3)
\end{aligned}$$

(5.125e)

Die Mesonenmassen sind damit vollständig in chiraler Dimension $D = 4$ bestimmt und bzgl. der Skala Λ auf One-Loop-Level renormiert. Zusätzlich zu den in Kap. 5.2.2 bestimmten Treelevel-Termen, die linear bzw. quadratisch in den Quarkmassen sind, tauchen logarithmische Schleifenkorrekturen auf. Diese sind sowohl auf dem Gitter, als auch im Kontinuumslikes von gleicher Form, da die Gitterkonstante nur implizit über die Massen führender Ordnung eingeht. Lediglich die aus dem Diagonalisierungsverfahren resultierenden Beiträge der Korrekturfunktion $g_{\pi\eta}(a, a^2)$ im Kaonen-Sektor liefern explizite Gitterterme, die im Grenzfall eines verschwindenden Gitters mit $g_{\pi\eta}(a, a^2) \rightarrow 1$ ein einfaches Verhalten zeigen. Betrachtet man die Beiträge der Schleifenintegrale, die sich in den Logarithmen äußern, zeigt sich, dass in der Summe lediglich die Pionen bzw. das η -Meson in dieser Ordnung der Entwicklung zu den Loops beitragen.

Anhand der erwähnten *chiralen Logarithmen* und deren nichttrivialem Verhalten im Grenzfall $m_q \rightarrow 0$ wird weitergehend deutlich, dass die Entwicklung in den Quarkmassen, wie sie im Rahmen der chiralen Störungstheorie angewandt wird, nicht vergleichbar mit bekannten Näherungsverfahren wie z.B. der Taylor-Entwicklung ist. Zwar verschwinden die Massen der Mesonen wie gewohnt für masselose Quarks, zeigen aber unter Berücksichtigung aller relevanten Diagramme aus Tab. 3.1, die auf dem Weinberg'schen Zählchema basieren, eine nichtanalytische Konvergenz. Dieses Auftreten von sowohl Termen mit analytischem, als auch mit nichtanalytischem Verhalten in der Nähe der Symmetrie wurde von L.F. Li und H. Pagels als eines der typischen Merkmale chiraler Störungstheorien identifiziert [45].

Die Massenaufspaltung zwischen neutralen und geladenen Kaonen lässt sich inkl. der Schleifenkorrekturen wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}
\Delta_{K^0 K^\pm} = & B_0(m_d - m_u) \\
& + \frac{4B_0^2}{F_0^2} \left[(-4L_4^r - 2L_5^r + 8L_6^r + 4L_8^r) [m_d^2 - m_u^2] \right. \\
& \quad \left. + (-4L_4^r - 4L_5^r + 8L_6^r + 8L_8^r) [m_d - m_u] m_s \right] \\
& + \frac{8aB_0W_0}{F_0^2} \left[(-L_5^r - 2W_4^r - W_5^r + 2W_6^r + 2W_8^r) [m_d - m_u] \right. \\
& \quad \left. + (-L_5^r - 4W_4^r - W_5^r + 4W_6^r + 2W_8^r) [m_d - m_u] \cos(\omega) \right] \\
& + \frac{8a^2W_0^2}{F_0^2} \left[(4L_4^r + L_5^r - 8L_6^r - 4L_8^r \right. \\
& \quad \left. - 8W_4^r - 2W_5^r + 8W_6^r + 4W_8^r) \left[\frac{m_d - m_u}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \right. \\
& \quad \left. + 2L_5 \left[\frac{m_s(m_d - m_u)}{(m_d + m_u)^2} \right] \sin^2(\omega) \right] \\
& + \frac{m_d - m_u}{32\pi^2 F_0^2} \frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \bar{m}_K^2 \left[\bar{m}_\eta^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] - \bar{m}_\pi^2 \ln \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{\Lambda^2} \right] \right] \\
& + \frac{B_0(m_d - m_u)}{32\pi^2 F_0^2} \left[\frac{2\bar{m}_\eta^2}{3} \ln \left[\frac{\bar{m}_\eta^2}{\Lambda^2} \right] \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3)
\end{aligned}$$

(5.126)

Die Endergebnisse entsprechen damit für den Grenzfall einer exakten Isospin-Symmetrie insgesamt denen aus der Arbeit von Tobias Sudmann (s. [34]) und im Kontinuumslikes den Resultaten von Kai Walter [38] sowie J. Gasser und H. Leutwyler [20]. Die Art der Renormierung, wie sie nach dem erläuterten Schema durchgeführt wurde, sollte in einer phy-

sikalisch konsistenten Quantenfeldtheorie keine Auswirkungen auf die Observablen haben. Dies lässt sich relativ einfach auf ein konstantes Verhalten der Mesonenmassen im Bezug auf die Renormierungsskala Λ zurückführen, sodass

$$\frac{dM_\phi^2}{d\Lambda} = 0 \quad (5.127)$$

gelten muss. Diese Behauptung lässt sich durch Einsetzen der Beziehung (H.5) und Ableitung der chiralen Logarithmen für alle der ermittelten Mesonenmassen zeigen und ist beispielhaft für das η -Meson explizit in Rg. (XIX) bewiesen.

Betrachtet man die Massenaufspaltung der Kaonen in Gl. (5.126) zeigt sich sowohl für den Treelevel-Term führender, als auch nächstführender Ordnung eine lineare Abhängigkeit zur u-d-Massendifferenz. Diese nimmt nach Angaben der *Particle Data Group* [15] empirische Werte von etwa 2-3 MeV an. Vergleicht man diesen Wert mit den Angaben zur Differenz der geladenen und neutralen Kaonen von etwa 4 MeV sowie deren Quarkinhalten, sind die Ergebnisse der chiralen Störungstheorie physikalisch plausibel. Für die betreffende Aufspaltung im Pionen-Sektor zeigt sich eine Unterdrückung der linearen Terme nicht nur in führender, sondern auch in nächstführender Ordnung. Das neutrale Pionen ist dadurch mit der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m^2)$ in der Masse reduziert und der LO-Korrekturterm von Ordnung $\mathcal{O}(10^{-5})$. Neben dieser durch die π^0 - η -Mischung bedingten Korrektur treten in höherer Ordnung explizite Differenzen auf der Diagonalen der Massenmatrix auf.

Die insgesamt kleine Größenordnung der Terme steht im Kontrast zu den experimentellen Ergebnissen, in denen die betreffende Aufspaltung mit etwa 4-5 MeV angegeben ist und daher ein lineares Verhalten bzw. Korrekturen größerer Ordnung erwartet werden. *Dashen's Theorem* [42] besagt darüber hinaus, dass die Massendifferenz der geladenen Mesonen zu ihren neutralen Partnern unter Berücksichtigung der elektromagnetischen Kräfte gleich ist. Die experimentelle Beobachtung, dass es sich dabei um Werte mit gleicher Größenordnung handelt, kann in Modellen und Simulationen, in denen die chirale Störungstheorie QED-Korrekturterme erhält, nachgewiesen werden [43, 44].

6. Zusammenfassung und Ausblick

Im Theorieteil dieser Arbeit, der sich im Wesentlichen über die Kapitel 2 bis 4 erstreckt, wurde zunächst eine kurze Einführung in die Quantenchromodynamik gegeben. Aus Symmetriebetrachtungen heraus konnte dann der Mechanismus zur Entstehung und Massenerzeugung der im Oktett der pseudoskalaren Mesonen zusammengefassten Teilchen hergeleitet und analysiert werden. Weitergehend wurde die QCD auf dem Gitter bezüglich der Auswirkungen auf die in der effektiven Feldtheorie zusammengefasste Physik der Mesonen eingeführt und beschrieben. Bevor die in Kapitel 5 gesammelten quantitativen Ergebnisse zusammengefasst und ausgewertet werden, soll die Theorie zunächst kurz resümiert werden:

Ausgehend von der Einführung der QCD als Quantenfeldtheorie ist das Confinement als eine spezifische und für die χ PT relevante Eigenschaft zu nennen. Das in Kapitel 2.1.1 qualitativ beschriebene Verhalten von Quarks beziehungsweise Antiquarks bei niedrigen Energien, das heißt die Kondensation zu gebundenen Zuständen, kann in Kapitel 3.2 direkt mit der spontanen Symmetriebrechung und folglich mit der Ausbildung der Oktett-Struktur im Zuge des Goldstone-Theorems in Verbindung gebracht werden. Der Erwartungswert des $\bar{q}q$ -Kondensates übernimmt dabei analog zu den Minimalbeispielen in Kapitel 3.1 die Rolle einer symmetriebrechenden Größe.

Die Erzeugung endlicher Massen der so beschriebenen Goldstone-Bosonen wird in Kapitel 3.1.3 anschaulich durch eine zusätzliche explizite perturbative Symmetriebrechung erklärt. Aus der anfänglichen Betrachtung der chiralen Symmetrie im Rahmen der QCD in Kapitel 2.3.1 ist bekannt, dass die Massen der drei leichteren Quarkflavors u , d und s bezüglich einer Skala von 1 GeV gerade die geforderte perturbative Eigenschaft besitzen.

Neben dem in dieser Arbeit behandelten Mesonen-Oktett kann das η' -Meson darüber hinaus aus der gruppentheoretischen Kondensation eines Farb- und Antifarbt-Tripletts als Singulett-Zustand identifiziert werden. Weitergehend wird die verhältnismäßig große Masse dieses Teilchens über die qualitative Auswertung der Noether-Ströme der verschiedenen Symmetrieuntergruppen erklärt. Dieser Ansatz wird zusätzlich über die experimentellen Ergebnisse aus hochenergetischen Kollisionen in [12] untermauert.

Um die so definierten bosonischen Freiheitsgrade physikalisch beschreiben zu können, wird in Kapitel 3.4 das Prinzip effektiver Feldtheorien anhand eines weiteren Minimalbeispiels eingeführt. Die Konstruktion einer effektiven Lagrangedichte beruht im Wesentlichen auf der Summation aller Terme, die aufgrund von trivialen Eigenschaften wie Kausalität und Unitarität sowie einer Invarianz bezüglich der zugrunde liegenden Symmetrien der Theorie zulässig sind. Die Einführung einer auf die Energie oder Masse bezogenen Skala lässt daraufhin eine betragsmäßige Sortierung der im Allgemeinen unendlichen Terme zu, sodass die Physik bis zur betreffenden Ordnung durch eine endliche Anzahl von Summanden beschrieben werden kann.

Nach Wahl einer geeigneten Parametrisierung der Mesonen in Kapitel 3.3 können so die relevanten Terme der effektiven Lagrangedichten führender und nächstführender Ordnung in Kapitel 3.5 durch relativ einfache Ansätze bestimmt werden. Die Anzahl der zu betrachtenden Terme und Entwicklungsparameter verlieren für höhere Ordnungen schnell an Überschaubarkeit, sodass sich die analytischen Rechnungen dieser Arbeit auf die ersten beiden Ordnungen beschränken.

Wie im Hauptteil erwähnt sind Monte-Carlo-Simulationen und die damit verbundene Diskretisierung der Raum-Zeit eine weit verbreitete und effiziente Methode, um Beschleuniger-Experimente zu ergänzen oder darüber hinaus zu ersetzen. In Kapitel 4 werden daher eingangs die Vorteile der Gitter-QCD mit besonderem Augenmerk auf die Physik der Mesonen beleuchtet. So ist beispielsweise durch die freie Wahl der ansonsten natürlich vorgegebenen Parameter eine Bestimmung der funktionalen Abhängigkeit der Mesonen- von den Quarkmassen möglich, sodass die Entwicklungsparameter der effektiven Theorie über Fit-Funktionen bestimmt werden können. Weitergehend können die Massen der Quarks

als experimentell schwer zugängliche Größen aus bekannten Entwicklungsparametern und Mesonenmassen bestimmt werden.

Die weitere Betrachtung der QCD auf dem Gitter in Kapitel 4.2 zeigt darüber hinaus jedoch einige Schwachstellen. Ein wichtiges Beispiel ist hier die auftretende Fermionen-Verdopplung, die nach dem Nielsen-Ninomiya No-Go-Theorem bei exakt erhaltener chiraler Symmetrie unvermeidlich ist. Dies bedeutet weitergehend, dass Gitter-Theorien, in denen die sogenannten Doppler als unphysikalische Teilchen eliminiert werden, eine zusätzliche Brechung der chiralen Symmetrie implizieren. In Kapitel 4.3 wird dieser Effekt unter Einführung der Wilson-Wirkung veranschaulicht, die zwar durch den zusätzlichen Wilson-Term die unphysikalischen Teilchen aus dem betrachteten Energiespektrum verschiebt, aber weitergehend die chirale Symmetrie explizit bricht. In der effektiven Lagrangedichte treten also zusätzliche durch das Gitter induzierte Fehlerterme auf, die bei der Bestimmung physikalischer Größen neben den statistischen auch systematische Fehler hervorrufen.

Als eine mögliche Methode zur Verbesserung der Ergebnisse wird in Kapitel 4.4 das Symanzik-Improvement-Programme eingeführt, im Zuge dessen unphysikalische Gegenterme in die Wirkung eingebracht werden, die Gitterartefakte führender Ordnung gerade kompensieren. Dieser Ansatz erweist sich allerdings aufgrund der unphysikalischen Quark Zero Modes für Simulationen mit endlichen aber perturbativen Quarkmassen als sehr ineffektiv und wird in Kapitel 4.6 durch den Twisted-Mass-Formalismus ersetzt. Dieser verbessert die Ergebnisse laut Wilson-Mittelung für die Wahl des Full-Twists, das heißt die formale Transformation der Quarkmassen zu rein imaginären Größen, automatisch um die führende Ordnung $\mathcal{O}(a)$. Nach Einbettung der χ PT in die Gitter-QCD mit Twisted-Mass können abschließend die zu untersuchenden Lagrangedichten führender und nächstführender Ordnung in den Gleichungen (4.44) und (4.45) angegeben werden.

Um die Auswirkungen der Gitterfehler und die theoretisch beschriebene Kompensation dieser im Full-Twist zu untersuchen, werden in Kapitel 5 die Mesonenmassen bestimmt und bis einschließlich zur Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ angegeben. Bei den Berechnungen in führender Ordnung zeigt sich in den Gleichungen (5.6) und (5.7b), dass das Minimum der Lagrangedichte bedingt durch den Twisted-Mass-Formalismus aus dem Ursprung heraus verschoben ist. Zur Bestimmung der Massen über die diagonalisierte Hesse-Matrix, die die Krümmung beschreibt, muss also zusätzlich eine Renormierung des Propagators gemäß Gleichung (5.15), erfolgen, um physikalische Ergebnisse zu erhalten. Zuvor werden die Komponenten durch zweifache Feldableitung der Exponentialfunktionen und Auswertung der Spuren für die betreffenden Indizes bestimmt. Nach Diagonalisierung der so definierten Massenmatrix, ergeben sich schlussendlich die Mesonenmassen führender Ordnung chiraler Störungstheorie in Gleichung (5.33).

Betrachtet man zunächst den Kontinuumsimes $a \rightarrow 0$ mit exakter Isospin-Symmetrie $m_u = m_d$, sind sowohl die Pionen, als auch die Kaonen massenentartet und zeigen die erwartete Wurzelabhängigkeit bezüglich der Quarkmassen. Für eine nichtverschwindende Gitterkonstante werden die erwarteten Fehlerterme in verschiedenen Ordnungen von a sichtbar. Geht man nun in den Full-Twist $\omega = \omega_F = \frac{\pi}{2}$ über, verschwinden im Pionen-Sektor die Terme führender Ordnung, was der erwarteten Wilson-Mittelung entspricht. Für die Kaonen kann ein analoges Verhalten nicht beobachtet werden, vielmehr ergibt sich die angesprochene Verbesserung im Fall $\omega = -\frac{\pi}{2}$. Das η -Meson erhält unabhängig von der Wahl des Twist-Winkels keine automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung. Weiterhin ist anzumerken, dass die quadratischen Gitterfehler für den Zero-Twist ω_0 für alle Mesonen verschwinden. Physikalisch zeigt sich weiterhin, dass die bekannte Gell-Mann-Okubo-Relation in Gleichung (5.35) unabhängig von a und ω erfüllt wird.

Führt man eine Massenaufspaltung Δm zwischen up- und down-Quark ein, zeigt sich eine Aufhebung der Entartung im Kaonen-Sektor, sodass deren quadratische Massen zusammen mit den übrigen Mesonen im Kontinuumsimes eine funktionale Abhängigkeit zu den

Konstituenten des physikalischen Quarkinhaltes in Abbildung 3.5 zeigen. Im π^0 - η -Sektor ergibt sich nach Diagonalisierung außerdem eine Korrektur der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m^2)$ (siehe Gleichung 5.34), aufgrund derer auch für das neutrale Pion die theoretisch vorhergesagte Verbesserung der Gitterfehler verschwindet. Weitergehend ist allerdings zu erwähnen, dass der betreffende Mischwinkel mit Werten $0,5^\circ - 1,0^\circ$ sehr klein ist. Auch der Korrekturterm $\Delta_{\pi\eta}$ ist gemessen an der Skala von 1 GeV mit einer Ordnung von $\mathcal{O}(10^{-5})$ im Vergleich zum führenden Term der Pionen-Massen der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(10^{-2})$ von geringer quantitativer Relevanz. Insgesamt entsprechen die so gefundenen Ergebnisse den Resultaten von K. Walter [38] und im Grenzwert exakter Isospin-Symmetrie denen von T. Sudmann [34].

Abschließend zu diesem Abschnitt wird in Kapitel 5.1.3 eine Optimierung der verwandten Feld-Parametrisierung eingeführt, die sich nach kurzer Rechnung aufgrund der nun hinfälligen Renormierung im Sinne von Gleichung (5.15) als wesentlich effektiver herausstellt. Grundgedanke ist die Implementierung des neuen Minimums in die Definition der Felder, sodass das Extremum der neu definierten Lagrangedichte wie gewohnt im Ursprung liegt. Neben der vereinfachten Berechnung der Massenmatrix kann nach [34] auf diese Weise ein Mehraufwand im Zuge der Schleifenrechnung nächstführender Ordnung vermieden werden.

Anknüpfend an die so bestimmte erste Ordnung der chiralen Störungstheorie wird in Kapitel 5.2 eine analoge Rechnung bezüglich der nächsthöheren durchgeführt. Der Mehraufwand in der Bestimmung der Treelevel-Massen bezieht sich im Wesentlichen auf die Anzahl und Komplexität der auszuwertenden Terme. Auch in nächstführender Ordnung wird zunächst das Minimum der Lagrangedichte bestimmt und in Gleichung (5.55) angegeben. Nachdem die derivativen sowie symmetriebrechenden Terme bestimmt sind, zeigt sich, dass die optimierte Parametrisierung die gewünschte Vereinfachung im Bezug auf den Mesonenpropagator nur teilweise erbringt. Zwar verlieren die zu bestimmenden Renormierungskonstanten an Umfang, werden allerdings nicht zu 1, wie es in führender Ordnung der Fall ist. Nach Berechnung der Krümmung über die Hesse-Matrix und Renormierung des Propagators kann die zu diagonalisierende Massenmatrix in den Gleichungen (5.64) und (5.66) vollständig angegeben werden. Die Komponenten sind im Vergleich zum vorherigen Abschnitt wie erwartet weitaus umfangreicher, die Struktur und Symmetrie bleibt allerdings erhalten. Aufgrund dessen verläuft das Diagonalisierungsverfahren für diese Matrix analog zum vorherigen Fall, sodass die Treelevel-Massen nächstführender Ordnung in den Gleichungen (5.70a-e) angegeben werden können. Die gefundenen Ergebnisse sind für $\Delta m \rightarrow 0$ deckungsgleich mit den Ausdrücken in T. Sudmann's Arbeit. Weiterhin ist festzuhalten, dass die Rechnungen im Kontinuumslimites sowohl über die Entwicklung der Lagrangedichte, als auch über die zweifache Ableitung identische Ergebnisse liefern.

Die zusätzlichen Terme mit der geforderten chiralen Ordnung $D = 4$ weisen darüber hinaus einige Auffälligkeiten auf. Beispielsweise kann für die Pionen eine explizite Abhängigkeit zur Masse des strange-Quarks festgestellt werden, sodass die auftretenden Ausdrücke im Kontinuumslimites nicht mehr den physikalischen Quarkinhalten entsprechen. Dieser Effekt nächstführender Ordnung kann allerdings aufgrund der kleinen empirischen Größenordnung der betreffenden Entwicklungsparameter als vernachlässigbar eingestuft werden. Ein analoges Ergebnis zeigt sich für die geladenen und neutralen Kaonen im Bezug auf die up- und down-Quarks, sodass auch diese Mesonen Abhängigkeiten zu allen drei Quarkflavors aufweisen. Weiterhin ist eine durch das Gitter bedingte Aufspaltung zwischen $\pi_{1,2}$ - und π_3 -Masse sichtbar. Diese kann allerdings nicht direkt auf die geladenen Pionen übertragen werden, da es sich bei den physikalischen Teilchen um eine Linearkombination von π_2 und π_3 handelt, sodass diese wie die geladenen Kaonen physikalisch korrekt massenentartet bleiben. Im Bezug auf die vorhergesagte Wilson-Mittelung wird deutlich, dass die automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung der Gitterfehler in dieser Ordnung der chiralen Störungstheorie im Full-Twist unabhängig von den übrigen Parametern für keines der acht Mesonen festzustellen ist. Darüber hinaus bleibt lediglich qualitativ festzustellen, dass diese

Wahl zumindest einen hauptsächlichen Teil der linearen Gitterterme kompensiert. Die u-d-Massendifferenz geht im Gegensatz zur führenden Ordnung sowohl in den Diagonaltermen, als auch in der Massenaufspaltung der Kaonen mit linearer und quadratischer Abhängigkeit ein. Bei Berechnung der Differenz von geladenen zu neutralen Kaonen-Massen zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie zuvor: Das strange-Quark geht explizit in die Aufspaltung ein, obwohl sich die Kaonen im Quarkinhalt nur bezüglich des u- und d-Quarks unterscheiden. Im Vergleich zu den Pionen werden die betreffenden Mischungen allerdings über Koeffizienten mit empirisch nicht vernachlässigbaren Werten impliziert. Des Weiteren ist der Ausdruck für $\Delta_{K^0 K^\pm}$ im Gegensatz zur ersten Ordnung von Gitterfehlern behaftet, die unabhängig vom Twist-Winkel bestehen. Die neue Massenkorrektur im π^0 - η -Sektor ist in Gleichung (5.72) angegeben und erhält einen zusätzlichen Term, der bezüglich der Entwicklungsskala von Ordnung $\mathcal{O}(10^{-8})$ ist. Hierbei wurden die Entwicklungskoeffizienten nach Tabelle 3.4 in der Größenordnung $\mathcal{O}(10^{-3})$ angenommen. Der führende Term von $\Delta_{\pi\eta}$ behält die Ordnung $\mathcal{O}(10^{-5})$ und ist damit eine Größenordnung kleiner als die nächstführende Ordnung $\mathcal{O}(10^{-4})$ der chiralen Entwicklung.

Um die Massen der in der effektiven Theorie beschriebenen gebundenen Zustände vollständig zu bestimmen, ist nach Tabelle 3.1 eine Renormierung bezüglich des abgebildeten Schleifendiagramms nötig. Eine der wichtigen Eigenschaften chiraler Störungstheorien ist die Berechnung von Schleifenkorrekturen einer gewünschten Ordnung über den Propagator der vorangegangenen. Die auftretenden Unendlichkeiten werden daraufhin in der Regel durch die Koeffizienten der entsprechenden Entwicklung absorbiert. Um die Rechnung in nächstführender Ordnung zu vervollständigen, werden die in Kapitel 5.2.3 benötigten Wechselwirkungsterme für den Loop-Vertex folglich durch eine Entwicklung der Lagrange-dichte führender Ordnung gewonnen. Nach Symmetrisierung der gefundenen Terme wird durch den in Gleichung (5.81) gegebenen Ausdruck eine Fallunterscheidung bezüglich Mischungen in der Schleife beziehungsweise an den äußeren Beinen getroffen. Die möglichen Terme für die matrixwertigen Schleifenbeiträge können dann anhand der Strukturkonstanten berechnet werden. Die so gefundenen Ausdrücke tragen über den üblichen Ansatz der Summation aller Schleifenzahlen zur Selbstenergie beziehungsweise zur Masse der Mesonen bei. Bei der Integration über die Schleifenpropagatoren tritt jeweils ein divergenter Ausdruck auf, der durch dimensionale Regularisierung isoliert und über das in Appendix H skizzierte Modified Minimal Subtraction Scheme in die Entwicklungskoeffizienten nächstführender Ordnung absorbiert werden kann.

Bei der Bestimmung der Propagatorkomponenten im Sektor des neutralen Pions und η -Mesons finden sich nach Rechnung (XVII) nichttriviale Korrekturen in quadratischer Ordnung der u-d-Massendifferenz. Um einen erheblichen Mehraufwand in den Schleifenrechnung sowie der Diagonalisierung der renormierten Massenmatrix zu vermeiden, werden Korrekturen von Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m^2)$ in den One-Loop-Rechnung vernachlässigt. Da die betreffenden Terme eine Größenordnung kleiner als die betrachtete chirale Entwicklung sind, bietet diese Annahme eine gute Näherung. Nach Betrachtung aller physikalisch möglichen Schleifen und Einsetzen der betreffenden Indizes in die Ausdrücke des Wechselwirkungsververtex ergeben sich die auf Seite 66 und 67 angegebenen Matrixkomponenten. Anhand der enthaltenen Integrale wird zunächst deutlich, dass jedes der Mesonenfelder Beiträge aus allen möglichen Schleifenpropagatoren erhält. Weitergehend zeigt sich, dass die Schleifenmatrizen für eine exakte Isospin-Symmetrie Diagonalgestalt haben, wie es beispielsweise in der Arbeit von T. Sudmann der Fall ist.

Da die Selbstenergie der Schleifenkorrekturen analog zur Treelevel-Rechnung impulsabhängige Anteile besitzt, müssen diese über eine Reihe von Matrixoperationen in die endgültige Massenmatrix eingebracht werden. Bei der expliziten Rechnung in Kapitel 5.2.4 zeigt sich, dass das Diagonalisierungsverfahren durch die erwähnte Vernachlässigung quadratischer Ordnungen von Δm deutlich vereinfacht wird. Die vollständig renormierten Massen sind weitergehend in den Gleichungen (5.125a) bis (5.125e) dargestellt. Die Ergebnisse

stimmen in den Grenzwerten exakter Isospin-Symmetrie beziehungsweise verschwindender Gitterkonstanten mit den Referenzen [34] beziehungsweise [20,38] überein. Im Vergleich zu den Schleifenmatrizen zeigt sich, dass die chiralen Logarithmen der One-Loop-Korrekturen in der Summe nur noch Beiträge der Pionen beziehungsweise des η -Mesons enthalten. Die Massendifferenz im Kaonen-Sektor in Gleichung (5.126) enthält ebenfalls Schleifenbeiträge, sodass die geladenen gegenüber den neutralen Kaonen nicht nur durch die Treelevel-beziehungsweise Kontakt-Terme, sondern auch durch Loop-Korrekturen des η -Mesons aufgespalten werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde somit die chirale Störungstheorie für die drei leichten Quarkflavors up, down und strange mathematisch hergeleitet und auf das Raum-Zeit-Gitter erweitert. Als mögliche Verbesserung der so entstehenden Gitterfehler ist der Twisted-Mass-Formalismus eingeführt worden, der laut Wilson-Mittelung Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ automatisch kompensieren soll. Im Fall entarteter up- und down-Quarks konnte dies in führender Ordnung nur für die drei Pionen-Massen beobachtet werden. Für eine gebrochene Isospin-Symmetrie verliert auch das neutrale Pion durch die π^0 - η -Mischung die automatische Verbesserung - der betreffende Mischwinkel nimmt allerdings sehr kleine Werte an. In nächstführender Ordnung zeigen die Mesonenmassen weder auf Tree-, noch auf One-Loop-Level eine erfolgreiche Wilson-Mittelung bei Full-Twist. Weitergehend zeigen die Endergebnisse in den betreffenden Grenzwerten sowohl die geforderte Übereinstimmung mit vergleichbaren Quellen, als auch eine physikalisch sinnvolle Form.

Für eine exaktere Betrachtung kann die Schleifenrechnung durch die quadratischen Korrekturen in Δm erweitert werden. Da der Ausdruck für den Wechselwirkungsvertex alle Ordnungen der u-d-Massenaufspaltung enthält, ist dies durch eine analoge Fallunterscheidung möglich. Das zusätzliche auftretende Loop-Integral im π^0 - η Sektor kann weitergehend in relativ einfacher Weise auf die zwei betrachteten zurückgeführt werden. Die so bestimmte renormierte Massenmatrix kann schlussendlich über ein modifiziertes Diagonalisierungsverfahren zur Ermittlung der Mesonenmassen genutzt werden.

A. Konventionen

Wie in der theoretischen Teilchenphysik üblich werden in dieser Arbeit alle Rechnungen in den natürlichen Einheiten durchgeführt. Für die betreffenden Naturkonstanten Lichtgeschwindigkeit, Planck'sches Wirkungsquantum sowie der Boltzmann-Konstante bedeutet dies folgende Definitionen:

$$c := 1, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} := 1 \quad \text{und} \quad k_B := 1. \quad (\text{A.1})$$

Für die physikalischen Einheiten bzw. Dimensionen ergibt sich damit

$$[\text{Energie}] = [\text{Masse}] = [\text{Temperatur}] = \frac{1}{[\text{Länge}]} = \frac{1}{[\text{Zeit}]} = 1 \text{ eV}. \quad (\text{A.2})$$

Weitergehend wird die Einstein'sche Summenkonvention verwendet, innerhalb derer die Summe über doppelt auftretende Indizes im kovarianten Skalarprodukt impliziert wird.

Darüber hinaus wird die übliche Schreibweise der *Spur* einer $n \times n$ -Matrix A wie folgt abgekürzt:

$$\langle A \rangle := \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}. \quad (\text{A.3})$$

B. Chirale Darstellung der γ -Matrizen

Will man die Spinoren als Lösungen der Dirac-Gleichung z.B. in der Lagrangedichte der Quantenchromodynamik derart darstellen, dass die Spinorkomponenten bzgl. ihrer links- und rechtshändigen Anteile separiert sind, sodass

$$\psi_{\text{Dirac}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_{\text{R}} + \chi_{\text{L}} \\ \chi_{\text{R}} - \chi_{\text{L}} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \psi_{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{\text{R}} \\ \chi_{\text{L}} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

muss die Darstellung der vier γ -Matrizen ebenfalls überführt werden. Die so gefundenen Spinoren $\chi_{\text{R,L}}$ werden auch als *Weyl-Spinoren* bezeichnet.

B.1. Im Minkowski-Raum

Bzgl. der Minkowski-Metrik $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ müssen die 4×4 -Matrizen über ihren Anti-Kommutator einer *Clifford-Algebra* genügen [8]:

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} := \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \stackrel{!}{=} 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}. \quad (\text{B.2})$$

Eine entsprechende Wahl für die γ -Matrizen ergibt sich z.B. durch

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.3})$$

mit den drei *Pauli-Matrizen* σ^i , sodass sich für die Spuren dieser Matrizen die nützlichen Relationen

$$\langle \gamma^{\mu} \rangle = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\langle \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} \rangle = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{B.5})$$

$$\text{und} \quad \langle \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} \rangle = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}). \quad (\text{B.6})$$

finden. Spuren über eine ungerade Anzahl von γ^{μ} nehmen stets den Wert Null an. Die Struktur der chiralen Projektoren vereinfacht sich in der Weyl-Darstellung weitergehend zu

$$P_{\text{L}} := \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{\text{R}} := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

mit

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

sodass

$$\psi_{\chi} = (P_{\text{L}} + P_{\text{R}})\psi_{\chi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{\text{L}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_{\text{R}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{\text{R}} \\ \chi_{\text{L}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Bzgl. γ_5 ergeben sich darüber hinaus folgende Relationen:

$$\gamma^5 \gamma^5 = \mathbb{1}, \quad (\text{B.10})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$\langle \gamma^5 \rangle = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$\langle \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \rangle = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$\langle \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5 \rangle = -4i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{B.14})$$

B.2. Mit Euklidischer Metrik

In der Quantenchromodynamik auf einem diskreten Raum-Zeit-Gitter wird eine Euklidische Metrik $\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ vorausgesetzt. Diese korrespondiert mit einer *Wick-Rotation*, infolge derer die Zeitkomponente der vierdimensionalen Raum-Zeit zu einer rein imaginären Größe transformiert wird. Eine analoge Transformation der γ -Matrizen ist nach [27] durch

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \gamma_4^{\text{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \\ \text{und } \gamma^j &\rightarrow i\gamma^j := \gamma_i^{\text{E}} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_i \\ -i\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

gegeben. Die fünfte γ -Matrix bleibt dabei invariant:

$$\gamma^5 = \gamma_5^{\text{E}} = \gamma_4 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Die so gefundene Euklidische Darstellung unterliegt ebenfalls einer Clifford-Algebra

$$\{\gamma_\mu^{\text{E}}, \gamma_\nu^{\text{E}}\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1}, \quad (\text{B.17})$$

bzgl. des in diesem Fall metrischen Tensors $\delta_{\mu\nu}$. Weitergehend ergibt sich aus dem Kommutator der Dirac-Matrizen die antisymmetrische Matrix

$$\sigma_{\mu\nu}^{\text{E}} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu^{\text{E}}, \gamma_\nu^{\text{E}}]. \quad (\text{B.18})$$

C. Spezielle Unitäre Gruppe SU(3)

Die *Spezielle Unitäre Gruppe* $SU(N)$ enthält die unitären $N \times N$ -Matrizen mit komplexen Einträgen, deren Determinanten den Wert 1 tragen:

$$SU(N) := \left\{ U \in \mathbb{C}^{N \times N} \mid \det U = 1, U^\dagger U = \mathbb{1} \right\}. \quad (\text{C.1})$$

Die Dimension der adjungierten Darstellung beträgt $d_A = N^2 - 1$, sodass sich für den in der Physik wichtigen Fall $N = 3$ insgesamt acht erzeugende Generatoren T_a ergeben. Des Weiteren unterliegen diese über den Kommutator der korrespondierenden $\mathfrak{su}(3)$ -Lie-Algebra:

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c \quad a, b, c = 1, \dots, 8. \quad (\text{C.2})$$

Eine mögliche Repräsentation ist durch die hermiteschen *Gell-Mann-Matrizen* λ_a über die Definition $\frac{\lambda_a}{2} := T_a$ gegeben [8]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & & \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Analog zur total antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{abc} kann für die SU(3) ein total symmetrischer Tensor d_{abc} über den Antikommutator definiert werden [46]:

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{3} \delta_{ab} \mathbb{1} + d_{abc} T_c \quad a, b, c = 1, \dots, 8. \quad (\text{C.4})$$

Für die so gefundenen Konstanten ergeben sich folgende von Null verschiedene Werte [1]:

abc	f_{abc}	abc	d_{abc}	abc	d_{abc}
123	1	118	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	366	$-\frac{1}{2}$
147	$\frac{1}{2}$	146	$\frac{1}{2}$	377	$-\frac{1}{2}$
156	$-\frac{1}{2}$	157	$\frac{1}{2}$	448	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
246	$\frac{1}{2}$	228	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	558	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
257	$\frac{1}{2}$	247	$-\frac{1}{2}$	668	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
345	$\frac{1}{2}$	256	$\frac{1}{2}$	778	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
367	$-\frac{1}{2}$	338	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	888	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	344	$\frac{1}{2}$		
678	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	355	$\frac{1}{2}$		

C.1. Tensoralgebra

Der total antisymmetrische Tensor f_{abc} und der total symmetrische Tensor d_{abc} erfüllen folgende algebraische Relationen [46]:

$$f_{abc}f_{dbc} = 3\delta_{ad}, \quad (C.5)$$

$$d_{abc}d_{dbc} = \frac{5}{3}\delta_{ad}, \quad (C.6)$$

$$f_{abc}d_{cde} = -f_{dbc}d_{ace} - f_{ebc}d_{adc}, \quad (C.7)$$

$$f_{abc}f_{dec} = \frac{2}{3}(\delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd}) + (d_{adc}d_{bec} - d_{bdc}d_{aec}), \quad (C.8)$$

$$d_{abc}d_{dec} = \frac{1}{3}(\delta_{ad}\delta_{be} + \delta_{ae}\delta_{bd} - \delta_{ab}\delta_{de}) + \frac{1}{3}(f_{adc}f_{bec} + f_{bdc}f_{aec}), \quad (C.9)$$

$$d_{abc}f_{abd} = 0. \quad (C.10)$$

C.2. Produkte und Spurrelationen

Für Produkte aus Gell-Mann-Matrizen finden sich die Beziehungen [1]:

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{1}{2} \{\lambda_a, \lambda_b\} + \frac{1}{2} [\lambda_a, \lambda_b] = \frac{2}{3} \delta_{ab} \mathbb{1} + h_{abc} \lambda_c \quad (C.11)$$

$$\text{und} \quad \lambda_a \lambda_b \lambda_c = \frac{2}{3} h_{abc} \mathbb{1} + \left(\frac{2}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} + h_{abe} h_{ecd} \right) \lambda_d, \quad (C.12)$$

$$\text{mit} \quad h_{abc} := d_{abc} + i f_{abc}. \quad (C.13)$$

Die Spuren der gefundenen Matrizen haben damit die Eigenschaften [1,47]:

$$\langle \lambda_a \rangle = 0, \quad (C.14)$$

$$\langle \lambda_a \lambda_b \rangle = 2\delta_{ab}, \quad (C.15)$$

$$\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_c \rangle = 2h_{abc}, \quad (C.16)$$

$$\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \rangle = \frac{4}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} + 2h_{abe} h_{ecd}, \quad (C.17)$$

$$\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \lambda_e \rangle = \frac{4}{3} h_{abc} \delta_{de} + \frac{4}{3} \delta_{ab} h_{cde} + 2h_{abf} h_{fcg} h_{gde}. \quad (C.18)$$

Damit findet sich unter Berücksichtigung der Vertauschungssymmetrie der Felder folgende Kombinationen aus Spuren und Feldprodukten [47,48]:

$$\langle \lambda_a \lambda_b \rangle \phi_a \phi_b = 2\phi_a^2 = 2|\Phi|^2, \quad (C.19)$$

$$\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_c \rangle \phi_a \phi_b \phi_c = 2d_{abc} \phi_a \phi_b \phi_c, \quad (C.20)$$

$$\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \rangle \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d = 2\delta_{ab} \delta_{cd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d = 2|\Phi|^4, \quad (C.21)$$

$$\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \lambda_e \rangle \phi_a \cdots \phi_e = \frac{2}{3} (\delta_{de} d_{abc} + \delta_{ce} d_{abd} + \delta_{cd} d_{abe} + 2\delta_{ab} d_{cde}) \phi_a \cdots \phi_e, \quad (C.22)$$

$$\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \lambda_8 \rangle \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d = \left(\frac{4}{3} \delta_{d8} d_{abc} + 2\delta_{ab} d_{cd8} \right) \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d, \quad (C.23)$$

$$\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \lambda_1 \rangle \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d = \left(\frac{4}{3} \delta_{d1} d_{abc} + 2\delta_{ab} d_{cd1} \right) \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d. \quad (C.24)$$

D. Spezielle Orthogonale Gruppe SO(3)

Analog zur SU(N) definiert sich die *Spezielle Orthogonale Gruppe* SO(N) über

$$\text{SO}(N) := \{R \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid \det R = 1, R^T R = \mathbb{1}\}, \quad (\text{D.1})$$

diese enthält die orthogonalen $N \times N$ -Matrizen mit reellen Einträgen und zu 1 definierter Determinante. Die adjungierte Dimension beträgt in diesem Fall $d_A = \frac{N(N-1)}{2}$, sodass sich für den Fall $N = 3$ drei infinitesimale Generatoren ergeben, die über

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

dargestellt werden können. Die Vertauschungs-Relationen berechnen sich damit zu

$$[T_a, T_b] = \varepsilon_{abc} T_c \quad a, b, c = 1, 2, 3, \quad (\text{D.3})$$

mit dem *Levi-Cevita-Tensor* ε_{abc} als Strukturkonstante der unterliegenden Lie-Algebra. Mit der Exponential-Darstellung

$$R(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) = \exp \left[\sum_{a=1}^3 \Theta_a T_a \right] \quad (\text{D.4})$$

können die Unterräume

$$R_a(\Theta_a) = \exp [\Theta_a T_a] \quad (\text{D.5})$$

jeweils als Drehung eines dreidimensionalen reellen Vektors \vec{x} bzgl. einer Raumrichtung identifiziert werden, sodass $R_a(\Theta)$ den *Drehmatrizen* entsprechen:

$$R_1(\Theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Theta_1) & \sin(\Theta_1) \\ 0 & -\sin(\Theta_1) & \cos(\Theta_1) \end{pmatrix}, \quad R_2(\Theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_2) & 0 & -\sin(\Theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\Theta_2) & 0 & \cos(\Theta_2) \end{pmatrix},$$

$$R_3(\Theta_3) = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_3) & \sin(\Theta_3) & 0 \\ -\sin(\Theta_3) & \cos(\Theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.6})$$

Die allgemeine Drehung eines reellen dreidimensionalen Vektors ist damit über

$$\vec{x} \rightarrow R(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \vec{x} \quad (\text{D.7})$$

definiert.

E.

Das Pfadintegral für Grassmann-wertige Felder

Grundlage zur Berechnung fermionischer Pfadintegrale bietet die Einführung der antikommutierenden Grassmann-Variablen. Dabei handelt es sich um allgemeine mathematische Objekte, die allein durch die *Grassmann-Algebra* bestimmt sind. Seien θ und η Grassmann-Variablen, so ergeben sich folgende Relationen [8]:

$$\{\theta, \eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0 \quad \text{Antikommutation,} \quad (\text{E.1})$$

$$\theta^2 = \eta^2 = 0 \quad \text{Nilpotenz,} \quad (\text{E.2})$$

$$\int d\theta = \int d\eta = 0, \quad (\text{E.3})$$

$$\int d\theta\theta = \int d\eta\eta = 1 \quad \text{Norm.} \quad (\text{E.4})$$

Daraus folgt für beliebige Funktionen $f(\theta)$:

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (A + B\theta) = B, \quad (\text{E.5})$$

und damit wiederum die Norm

$$\int d\theta \int d\eta \theta\eta = 1. \quad (\text{E.6})$$

Führt man nun komplexe Grassmann-Zahlen gemäß

$$\theta := \frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \theta^* := \frac{\theta_1 - i\theta_2}{\sqrt{2}} \quad (\text{E.7})$$

ein, erhält man durch die Entwicklung der Exponential-Funktion sowie unter Verwendung der Grassmann-Algebra und (E.5):

$$\int d\theta^* \int d\theta \exp[-\theta^* b\theta] = \int d\theta^* \int d\theta (1 + \theta\theta^* b) = b. \quad (\text{E.8})$$

Verallgemeinert man das skalare Produkt im exponentiellen Argument durch ein Matrix-Vektor-Produkt mit hermitescher Matrix B , findet man nach [8]:

$$\begin{aligned} \prod_i \int d\theta_i^* \int d\theta_i \exp[-\theta_i^* B_{ij} \theta_j] &= \prod_i \int d\theta_i^* \int d\theta_i \exp\left[-\sum_i \theta_i^* b_i \theta_i\right] \\ &= \prod_i b_i = \det B. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Dabei sind b_i die Eigenwerte von B .

Ausgehend von der Grassmann-Algebra lässt sich jeder Dirac-Spinor $\psi(x)$ als eine Überlagerung aus Grassmann-Zahlen ψ_i und Komplexen Basis-Funktionen $\phi_i(x)$ schreiben:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x). \quad (\text{E.10})$$

E.1. Die Fermionen-Determinante

Ein fermionisches Pfadintegral der Form

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp [iS [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}]] , \quad (\text{E.11})$$

$$\text{mit} \quad S [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}] = \int d^3x dt \mathcal{L} [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}] \quad (\text{E.12})$$

$$\text{und} \quad \mathcal{L} [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}] = \bar{\psi} (i\mathcal{D} - m) \psi \quad (\text{E.13})$$

lässt sich mit der Relation (E.9) also stets über die sog. *Fermionen-Determinante* ausdrücken:

$$Z = \det [i\mathcal{D} - m] . \quad (\text{E.14})$$

Simuliert man QCD-Wechselwirkungen im Rahmen von Monte-Carlo-Algorithmen, dient das Gitter-Analogon zu dieser Determinante als statistischer Gewichtungsfaktor für die verschiedenen Beiträge der Feldkonfigurationen. Für kleine Quarkmassen m treten *Quark Zero Modes* auf, aus denen sich Simulationsergebnisse ergeben, die dem masselosen Fall entsprechen [49]; bzw. erzeugen masselose Quarks weitergehend unphysikalische negative Eigenwerte des Dirac-Operators [31]. Anschaulich lässt sich dies durch die Überlagerung der Massenbeiträge durch statistische Fehler beschreiben, die im Verhältnis zu den kleinen Eigenwerten der Fermionen-Determinante große Werte annehmen können, sodass die Messung unbrauchbar wird. Dieser Effekt lässt sich nicht durch längere Rechenzeiten bzw. eine größere Empirie kompensieren. Ein oft verwandter Lösungsansatz ist die Annahme unphysikalisch großer Quarkmassen. Da die in dieser Arbeit behandelte χ PT allerdings auf einem perturbativen Ansatz dieser Größen beruht, liefert die Einführung der *Twisted-Mass* eine optimierte Lösung.

Ausgehend von einer axialen Drehung der Massenmatrix gemäß Kap. 4.5 verhält sich die Determinante (E.14) wie folgt:

$$\begin{aligned} \det [\mathcal{D}\mathbb{1} + m\mathbb{1}] &\rightarrow \det [\mathcal{D}\mathbb{1} + m\mathbb{1} + i\mu\gamma_5\lambda_3] & (\text{E.15}) \\ &= \det [\mathcal{D} + m + i\mu\gamma_5] \det [\mathcal{D} + m - i\mu\gamma_5] \\ &= \det [\mathcal{D} + m + i\mu\gamma_5] \det [\gamma_5(\mathcal{D} + m - i\mu\gamma_5)\gamma_5] \\ &= \det [\mathcal{D} + m + i\mu\gamma_5] \det [\mathcal{D}^\dagger + m - i\mu\gamma_5] \\ &= \det [(\mathcal{D} + m + i\mu\gamma_5) (\mathcal{D}^\dagger + m - i\mu\gamma_5)] \\ &= \det [(\mathcal{D} + m) (\mathcal{D} + m)^\dagger + \mu^2] > 0 \quad \text{für} \quad \mu^2 > 0. & (\text{E.16}) \end{aligned}$$

Die Form der Lagrangedichte wurde an dieser Stelle in den Gitterformalismus übersetzt. Des Weiteren wird ein Minimalbeispiel entarteter Quarkmassen angesetzt.

F.

Wilson-Mittelung und Full-Twist $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung

Grundlage für die *Wilson-Mittelung* ist die \mathcal{R}_5 -Parität. Die zugehörigen Transformationen sind für Dirac-Felder wie folgt definiert [31]:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = \gamma_5 \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = -\bar{\psi} \gamma_5, \end{aligned} \tag{F.1}$$

sodass $\mathcal{R}_5 \in SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$.

Diese lassen die QCD-Wirkung im Kontinuum für masselose Quarks invariant. Die Einführung eines Wilson- und eines Massenterms im Rahmen der Gitter-Quantenchromodynamik bricht diese Invarianz, sodass die Transformation (F.1) erweitert werden muss, um die Symmetrie wiederherzustellen:

$$\mathcal{R}_5 \rightarrow \mathcal{R}_5^\# = \mathcal{R}_5 \times [r \rightarrow -r] \times [m_f \rightarrow -m_f]. \tag{F.2}$$

In [30,31] wird gezeigt, dass die so definierte Wilson- bzw. Massen-Mittelung

$$\langle O \rangle^{\text{WA}} = \frac{1}{2} \left(\langle O \rangle_{r,m_f} + \langle O \rangle_{-r,m_f} \right) \tag{F.3}$$

$$\text{bzw.} \quad \langle O \rangle^{\text{MA}} = \frac{1}{2} \left(\langle O \rangle_{r,m_f} + \langle O \rangle_{r,-m_f} \right) \tag{F.4}$$

einer Observablen O eine automatische Verbesserung der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ liefert. Um die Ergebnisse auf diese Weise zu optimieren, sind i.A. zwei unabhängige Simulationen mit verschiedenen gewählten Parametern nötig, sodass sich der technische Aufwand verdoppelt. Führt man einen Massentwist gemäß Kap. 4.5 ein, wird deutlich, dass die zugrunde liegende Wirkung invariant unter der Transformation

$$[r \rightarrow -r] \times [\omega \rightarrow \omega + \pi] \tag{F.5}$$

$$\cong [r \rightarrow -r] \times \left[\omega - \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega + \frac{\pi}{2} \right] \tag{F.6}$$

ist. Die Wilson-Mittelung in Gl. (F.3) kann also für den Full-Twist $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$ analog durch eine entsprechende Transformation des Twist-Parameters ausgedrückt werden:

$$\langle O \rangle^{\text{WA,tm}} = \frac{1}{2} \left(\langle O \rangle_{\omega,m_f} + \langle O \rangle_{-\omega,m_f} \right). \tag{F.7}$$

Für Observablen mit gerader ω -Parität

$$\langle O \rangle_\omega = \langle O \rangle_{-\omega} \tag{F.8}$$

$$\Leftrightarrow \langle O \rangle_r = \langle O \rangle_{-r} \tag{F.9}$$

sind beide für die $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung notwendigen Messwerte also äquivalent, sodass mit einer einzelnen Simulation eine automatische Wilson-Mittelung und damit Elimination der $\mathcal{O}(a)$ Gitterfehler erreicht wird. Das geforderte Verhalten bzgl. des Twist-Winkels trifft auf viele physikalische Größen wie z.B. Energieeigenwerte zu, sodass die automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung neben der in App. E.1 beschriebenen Vermeidung von Quark Zero Modes die wichtigste Eigenschaft der Twisted-Mass Gitter-QCD darstellt.

G. Die Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion beschreibt im Wesentlichen die Fortsetzung der *Fakultät* auf die reellen Zahlen [40]. Es gilt

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{G.1})$$

Für reelle Argumente kann diese Funktion durch das Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty k^{x-1} \exp[-k] dk \quad (\text{G.2})$$

ausgedrückt werden. Die so definierte Gamma-Funktion besitzt einige wichtige Eigenschaften, die hier kurz aufgeführt werden sollen:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (\text{G.3})$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{G.4})$$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}} dt := B(x, y) \quad \text{Beta-Funktion} \quad (\text{G.5})$$

sowie
$$\frac{1}{\Gamma(1-x)\Gamma(x)} = x \prod_{k=1}^\infty \left[1 - \frac{x^2}{k^2} \right]. \quad (\text{G.6})$$

Damit kann sie über das *Sinusprodukt*

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^\infty \left[1 - \frac{x^2}{k^2} \right] \quad (\text{G.7})$$

eng mit der Sinusfunktion verknüpft werden [40].

Der Winkelanteil

$$I_W(n) = \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \int_0^\pi \sin(\vartheta_2) d\vartheta_2 \int_0^\pi \sin^2(\vartheta_3) d\vartheta_3 \cdot \dots \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2}(\vartheta_{n-1}) d\vartheta_{n-1} \quad (\text{G.8})$$

des in Kap. 5.2.3 behandelten Integrals lässt sich somit über die Gamma-Funktion ausdrücken. Es gilt die Rekursionsformel

$$\int_0^\pi \sin^m(\vartheta) d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(\vartheta) d\vartheta = 2 \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}(\vartheta) d\vartheta \quad (\text{G.9})$$

und damit

$$\int_0^\pi \sin^m(\vartheta) d\vartheta = 2 \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^{\frac{m}{2}} \frac{2i-1}{2i} & \text{für } m \text{ gerade} \\ \prod_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{2i}{2i+1} & \text{für } m \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (\text{G.10})$$

Die Produkte können wieder zu Gamma-Funktionen zusammengefasst werden, sodass

$$\int_0^\pi \sin^m(\vartheta) d\vartheta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \quad (\text{G.11})$$

$$\Rightarrow I_W(n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (\text{G.12})$$

H.

Renormierung der NLO-Entwicklungskoeffizienten

Im Zuge der Renormierung von Quantenfeldtheorien werden divergente Größen üblicherweise in die Normierung der Felder absorbiert. In der hier behandelten effektiven Feldtheorie bietet es sich an, dies durch ein analoges Verfahren im Bezug auf die Entwicklungskoeffizienten durchzuführen. Eine grundlegende Eigenschaft von chiralen Störungstheorien ist der Umstand, dass die aus Termen führender Ordnung auftretenden Divergenzen wie z.B. der Schleifenbeiträge in Kap. 5.2.3 nicht in die Koeffizienten der betreffenden Ordnung absorbiert werden können. Dies muss vielmehr durch die Modifikation der Koeffizienten der nächstfolgenden Ordnung gemäß $C_i \rightarrow C_i^r$ geschehen.

Die Schleifenbeiträge bzw. divergenten Integrale können in einen endlichen und einen für $d = 4$ Raum-Zeit-Dimensionen bzw. im Fall $\varepsilon = 0$ unendlichen Beitrag \mathfrak{R} separiert werden. Dieser ist gegeben durch

$$\mathfrak{R} = \frac{2}{\varepsilon} - \ln(4\pi) - \gamma_E - 1, \quad (\text{H.1})$$

und wird über das *Modified Minimal Subtraction Scheme* ($\overline{\text{MS}}$) in die NLO-Entwicklungskoeffizienten absorbiert (s. [8]). Nach [20] ergibt sich folgendes Renormierungsschema zur Absorption der Unendlichkeiten:

$$L_i^r = L_i - \frac{\Gamma_i}{32\pi^2} \mathfrak{R}, \quad W_i^r = W_i - \frac{\Delta_i}{32\pi^2} \mathfrak{R} \quad \text{und} \quad W_i'^r = W_i' - \frac{\Delta_i'}{32\pi^2} \mathfrak{R}. \quad (\text{H.2})$$

Für die Gittergrößen gilt dabei:

$$\Delta_i' = \Gamma_i \quad \text{und} \quad \Delta_i = \begin{cases} \Gamma_i & \text{für } i = 4, 5 \\ 2\Gamma_i & \text{für } i = 6, 7, 8. \end{cases} \quad (\text{H.3})$$

Die für die durchgeführte Rechnung relevanten Koeffizienten nehmen dabei nach [50] folgende Werte an:

	Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8
	$\frac{1}{8}$	$\frac{N_f}{8}$	$\frac{N_f^2+2}{16N_f^2}$	0	$\frac{N_f^2-4}{16N_f}$
$N_f = 3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{144}$	0	$\frac{5}{48}$

Ein Wechsel zur Renormierungsskala Λ' wird mit

$$L_i^r(\Lambda) = L_i^r(\Lambda') + \frac{\Gamma_i}{16\pi^2} \ln \left[\frac{\Lambda'}{\Lambda} \right] \quad (\text{H.4})$$

erreicht, sodass sich die Skalenabhängigkeit zu

$$\frac{d}{d\Lambda} L_i^r(\Lambda) = -\frac{\Gamma_i}{16\pi^2} \frac{1}{\Lambda} \quad (\text{H.5})$$

ergibt. Die Betrachtung der Koeffizienten W_i^r und $W_i'^r$ folgt analog.

Rechnungen

Rechnung (I):

$$\begin{aligned}
U^{(2)} &= \mathbb{1} + \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a - \frac{1}{2F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \\
\mathcal{L}_{\text{LO, sb}} &= -\frac{F_0^2}{12} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \langle U + U^\dagger \rangle + \frac{F_0^2}{4\sqrt{3}} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \langle [U + U^\dagger] \lambda_8 \rangle \\
&\quad - \frac{F_0^2}{4} \Delta\chi \langle [U + U^\dagger] \lambda_1 \rangle + \frac{iF_0^2}{4} \rho_3 \langle [U - U^\dagger] \lambda_3 \rangle \\
\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{LO, sb}}^{(2)} &= \frac{1}{12} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \left\langle \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{4\sqrt{3}} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \left\langle \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_8 \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{4} \Delta\chi \left\langle \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_1 \right\rangle \\
&\quad - \frac{F_0}{2} \rho_3 \left\langle \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_3 \right\rangle + \text{const.} \\
&\stackrel{\substack{\text{(C.19)} \\ \text{(C.20)}}}{=} \frac{1}{6} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \Phi^2 - F_0 \rho_3 \phi_3 + \text{const.} \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{3}} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \sum_{a,b=1}^8 \phi_a \phi_b \mathbf{d}_{ab8} + \frac{1}{2} \Delta\chi \sum_{a,b=1}^8 \phi_a \phi_b \mathbf{d}_{ab1} \\
&= \frac{1}{6} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \sum_{a=1}^8 \phi_a^2 - F_0 \rho_3 \phi_3 + \text{const.} \\
&\quad - \frac{1}{6} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \left[\sum_{a=1}^3 \phi_a^2 - \frac{1}{2} \sum_{a=4}^8 \phi_a^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta\chi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \phi_1 \phi_8 + \frac{1}{2} (\phi_4 \phi_6 + \phi_5 \phi_7) \right) + \frac{1}{2} \Delta\chi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \phi_8 \phi_1 + \frac{1}{2} (\phi_6 \phi_4 + \phi_7 \phi_5) \right) \\
&= \frac{1}{2} (\hat{\chi} + \tilde{\rho}) \bar{\pi}^2 + \frac{1}{4} (\hat{\chi} + \tilde{\rho} + \chi_s + \rho_0) \bar{K}^2 + \frac{1}{6} (\hat{\chi} + \tilde{\rho} + 2(\chi_s + \rho_0)) \eta_8^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta\chi (K_4 K_6 + K_5 K_7) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi \pi_1 \eta_8 - F_0 \rho_3 \pi_3 + \text{const.}
\end{aligned}$$

Rechnung (III.a):

$$\begin{aligned}
U^{(4)} + U^{\dagger(4)} &= 2\mathbb{1} - \frac{1}{F_0^2} \sum_{c,d=1}^8 \lambda_c \phi_c \lambda_d \phi_d + \frac{1}{12F_0^4} \sum_{c,d,e,f=1}^8 \lambda_c \phi_c \lambda_d \phi_d \lambda_e \phi_e \lambda_f \phi_f \\
\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U + U^\dagger] &= -\frac{1}{F_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi_a} \left[\sum_{c=1}^8 [\lambda_b \lambda_c \phi_c + \lambda_c \phi_c \lambda_b] \right] \\
&\quad + \frac{1}{12F_0^4} \frac{\partial}{\partial \phi_a} \left[\sum_{c,d,e=1}^8 [\lambda_b \lambda_c \phi_c \lambda_d \phi_d \lambda_e \phi_e + \lambda_c \phi_c \lambda_b \lambda_d \phi_d \lambda_e \phi_e \right. \\
&\quad \left. + \lambda_c \phi_c \lambda_d \phi_d \lambda_b \lambda_e \phi_e + \lambda_c \phi_c \lambda_d \phi_d \lambda_e \phi_e \lambda_b] \right] + \mathcal{O}(\phi^3) \\
(\text{mit } H_{ab} = H_{ba}) &= -\frac{2}{F_0^2} \lambda_a \lambda_b \\
&\quad + \frac{1}{6F_0^4} \sum_{c,d=1}^8 [\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d + \lambda_a \lambda_c \lambda_b \lambda_d + \lambda_a \lambda_c \lambda_d \lambda_b \\
&\quad + \lambda_c \lambda_a \lambda_b \lambda_d + \lambda_c \lambda_a \lambda_d \lambda_b + \lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b] \phi_c \phi_d + \mathcal{O}(\phi^3) \\
\Rightarrow \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U + U^\dagger] \right\rangle_{\Phi=\check{\Phi}} &= -\frac{2}{F_0^2} \left[\langle \lambda_a \lambda_b \rangle - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} [2\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \rangle + \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_b \lambda_3 \rangle] \right] + \mathcal{O}(a^3) \\
\left\langle \frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U + U^\dagger] \lambda_c \right\rangle_{\Phi=\check{\Phi}} &= -\frac{2}{F_0^2} \left[\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_c \rangle - \frac{\check{\phi}_3^2}{12F_0^2} [\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \lambda_c \rangle + \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_b \lambda_3 \lambda_c \rangle \right. \\
&\quad + \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_3 \lambda_b \lambda_c \rangle + \langle \lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_c \rangle \\
&\quad \left. + \langle \lambda_3 \lambda_a \lambda_3 \lambda_b \lambda_c \rangle + \langle \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_c \rangle] \right] + \mathcal{O}(a^3) \\
U^{(3)} - U^{\dagger(3)} &= \frac{2i}{F_0} \sum_{c=1}^8 \lambda_c \phi_c - \frac{i}{3F_0^3} \sum_{c,d,e=1}^8 \lambda_c \phi_c \lambda_d \phi_d \lambda_e \phi_e \\
\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U - U^\dagger] &= -\frac{i}{3F_0^3} \frac{\partial}{\partial \phi_a} \left[\sum_{c,d=1}^8 [\lambda_b \lambda_c \phi_c \lambda_d \phi_d + \lambda_c \phi_c \lambda_b \lambda_d \phi_d + \lambda_c \phi_c \lambda_d \phi_d \lambda_b] \right] + \mathcal{O}(\phi^2) \\
(\text{mit } H_{ab} = H_{ba}) &= -\frac{2i}{3F_0^3} \sum_{c=1}^8 [\lambda_a \lambda_b \lambda_c + \lambda_a \lambda_c \lambda_b + \lambda_c \lambda_a \lambda_b] \phi_c + \mathcal{O}(\phi^2) \\
\Rightarrow \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U - U^\dagger] \lambda_3 \right\rangle_{\Phi=\check{\Phi}} &= -\frac{2i}{3F_0^3} [2\langle \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \rangle + \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_b \lambda_3 \rangle] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (III.b):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{LO, sb}}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=\check{\Phi}} &= -\frac{F_0^2}{12} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \langle \lambda_a \lambda_b [U + U^\dagger] \Big|_{\Phi=\check{\Phi}} \rangle \\
&+ \frac{F_0^2}{4\sqrt{3}} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_b [U + U^\dagger] \Big|_{\Phi=\check{\Phi}} \lambda_8 \rangle \\
&- \frac{F_0^2}{4} \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_b [U + U^\dagger] \Big|_{\Phi=\check{\Phi}} \lambda_1 \rangle + \frac{iF_0^2}{4} \rho_3 \langle \lambda_a \lambda_b [U - U^\dagger] \Big|_{\Phi=\check{\Phi}} \lambda_3 \rangle \\
\Rightarrow H_{11,22} &= \frac{1}{3} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} \right] - \frac{1}{3} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} \right] + \frac{\check{\phi}_3 \rho_3}{3F_0} + \mathcal{O}(a^3) \\
H_{33} &= \frac{1}{3} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \right] - \frac{1}{3} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \right] + \frac{\check{\phi}_3 \rho_3}{F_0} + \mathcal{O}(a^3) \\
H_{44,55,66,77} &= \frac{1}{3} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} \right] + \frac{1}{6} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \left[1 + \frac{\check{\phi}_3^2}{12F_0^2} \right] + \frac{\check{\phi}_3 \rho_3}{3F_0} + \mathcal{O}(a^3) \\
H_{88} &= \frac{1}{3} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} \right] + \frac{1}{3} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \left[1 + \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} \right] + \frac{\check{\phi}_3 \rho_3}{3F_0} + \mathcal{O}(a^3) \\
H_{46,64,57,75} &= \frac{1}{2} \Delta\chi \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{12F_0^2} \right] + \mathcal{O}(a^3) \\
H_{18,81} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \Delta\chi \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} \right] + \mathcal{O}(a^3) \\
\Rightarrow H_{ab} &= \begin{cases} \hat{\chi} + \tilde{\rho} + \frac{\rho_3^2}{6\hat{\chi}} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 1, 2 \\ \hat{\chi} + \tilde{\rho} + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 3 \\ \frac{1}{2} \left[\hat{\chi} + \tilde{\rho} + \chi_s + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{12\hat{\chi}} (5\hat{\chi} - \chi_s) \right] + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 4, 5, 6, 7 \\ \frac{1}{3} \left[\hat{\chi} + \tilde{\rho} + 2(\chi_s + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right] + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 8 \\ \frac{1}{2} \Delta\chi \left[1 - \frac{\rho_3^2}{12\hat{\chi}} \right] + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } ab = 46, 64, 57, 75 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi \left[1 - \frac{\rho_3^2}{6\hat{\chi}} \right] + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } ab = 18, 81 \end{cases}
\end{aligned}$$

Rechnung (IV):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = O^T \begin{pmatrix} \bar{m}_\pi^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\chi \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\chi & \bar{m}_\eta^2 \end{pmatrix} O$$

$$\text{mit } O = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\pi\eta}) & \sin(\theta_{\pi\eta}) \\ -\sin(\theta_{\pi\eta}) & \cos(\theta_{\pi\eta}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \theta_{\pi\eta} &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\Delta\chi}{\sqrt{3}(\bar{m}_\eta^2 - \bar{m}_\pi^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}\Delta\chi}{\chi_s - \hat{\chi} + \rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}\Delta\chi}{\chi_s - \hat{\chi}} \right) - \frac{\sqrt{3}\Delta\chi(\rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}})}{6\Delta\chi^2 + 2(\chi_s - \hat{\chi})^2} + \frac{\sqrt{3}\Delta\chi(\chi_s - \hat{\chi})(\rho_0 - \tilde{\rho})^2}{2[\Delta\chi^2 + (\chi_s - \hat{\chi})^2]^2} + \mathcal{O}(a^3) \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)}{\cos(\arctan(x))} = \frac{1}{4}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 &= \bar{m}_\pi^2 - [\bar{m}_\eta^2 - \bar{m}_\pi^2] \frac{\sin^2(\theta_{\pi\eta})}{\cos(2\theta_{\pi\eta})} \\ &= \bar{m}_\pi^2 - \frac{2}{3} \left(\chi_s - \hat{\chi} + \rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right) \frac{\sin^2(\theta_{\pi\eta})}{\cos(2\theta_{\pi\eta})} \\ &= \bar{m}_\pi^2 - \frac{1}{6} \left(\chi_s - \hat{\chi} + \rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right) \left(\frac{\sqrt{3}\Delta\chi}{\chi_s - \hat{\chi} + \rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}}} \right)^2 + \mathcal{O}(\Delta\chi^4) \\ &= \bar{m}_\pi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\chi^2}{\chi_s - \hat{\chi} + \rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}}} + \mathcal{O}(\Delta\chi^4) \\ &= \bar{m}_\pi^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{\Delta\chi^2}{\chi_s - \hat{\chi}} - \frac{\Delta\chi^2(\rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}})}{(\chi_s - \hat{\chi})^2} + \frac{\Delta\chi^2(\rho_0 - \tilde{\rho})^2}{(\chi_s - \hat{\chi})^3} \right]}_{:=\Delta_{\pi\eta}} + \mathcal{O}(\Delta\chi^4, a^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_2 &= \bar{m}_\eta^2 + \frac{2}{3} \left(\chi_s - \hat{\chi} + \rho_0 - \tilde{\rho} - \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right) \frac{\sin^2(\theta_{\pi\eta})}{\cos(2\theta_{\pi\eta})} \\ &= \dots \\ &= \bar{m}_\eta^2 + \frac{1}{2}\Delta_{\pi\eta} + \mathcal{O}(\Delta\chi^4, a^3) \end{aligned}$$

Rechnung (V):

$$\begin{aligned}
\ln [\exp[x] \exp[y] \exp[z]] &= x + y + z + \frac{1}{2}([x, z] + [x, y] + [y, z]) \\
&+ \frac{1}{12}([x, [x, y]] + [x, [x, z]] + 2[x, [y, z]] + [y, [y, x]] \\
&+ [y, [y, z]] + [z, [z, x]] + [z, [z, y]] + 2[z, [y, x]]) + \mathcal{O}(x^4, \dots) \\
\Rightarrow \sum_{a=1}^8 \lambda_a \hat{\phi}_a &= \sum_{a=1}^8 \lambda_a \left[-\frac{1}{2} \check{\phi}_a + (\phi_a + \check{\phi}_a) - \frac{1}{2} \check{\phi}_a \right] \\
&+ \frac{i}{8F_0} \sum_{a,b=1}^8 [\lambda_a, \lambda_b] (\check{\phi}_a \check{\phi}_b - \check{\phi}_a (\phi_b + \check{\phi}_b) - (\phi_a + \check{\phi}_a) \check{\phi}_b) \\
&- \frac{1}{96F_0^2} \sum_{a,b,c=1}^8 [\lambda_a, [\lambda_b, \lambda_c]] (4\check{\phi}_a \check{\phi}_b (\phi_c + \check{\phi}_c) + 8\check{\phi}_a (\phi_b + \check{\phi}_b) \check{\phi}_c \\
&- 8(\phi_a + \check{\phi}_a) (\phi_b + \check{\phi}_b) \check{\phi}_c - 2\check{\phi}_a \check{\phi}_b \check{\phi}_c) + \mathcal{O}(\phi^3) \\
&= \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a - \frac{1}{24F_0^2} \sum_{a,b,c=1}^8 ([\lambda_3, [\lambda_3, \lambda_c]] \check{\phi}_3^2 \phi_c + 2[\lambda_3, [\lambda_b, \lambda_3]] \check{\phi}_3^2 \phi_b \\
&- 2[\lambda_a, [\lambda_3, \lambda_3]] \check{\phi}_3^2 \phi_a - 2[\lambda_3, [\lambda_b, \lambda_3]] \check{\phi}_3^2 \phi_b) + \mathcal{O}(\phi^2) \\
&= \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a + \frac{\check{\phi}_3^2}{24F_0^2} \sum_{a=1}^8 [\lambda_3, [\lambda_a, \lambda_3]] \phi_a + \mathcal{O}(\phi^2) \\
&\stackrel{(C.2)}{=} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} \sum_{a=1}^8 f_{a3b} f_{c3b} \lambda_c \phi_a + \mathcal{O}(\phi^2) \\
&= \sum_{a=1}^8 \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} f_{a3b} f_{a3b} \right] \lambda_a \phi_a + \mathcal{O}(\phi^2) \\
\Rightarrow \hat{\phi}_a &= \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{6F_0^2} f_{a3b} f_{a3b} \right] \phi_a + \mathcal{O}(\phi^2)
\end{aligned}$$

Rechnung (VI):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 U'}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} &= -\frac{1}{F_0^2} \exp \left[\frac{i}{2F_0} \sum_{c=1}^8 \lambda_c \check{\phi}_c \right] \lambda_a \lambda_b \exp \left[\frac{i}{2F_0} \sum_{c=1}^8 \lambda_c \check{\phi}_c \right] \\
&= -\frac{1}{F_0^2} \left[\mathbb{1} + \frac{i\check{\phi}_3}{2F_0} \lambda_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \lambda_a \lambda_b \left[\mathbb{1} + \frac{i\check{\phi}_3}{2F_0} \lambda_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] + \mathcal{O}(a^3) \\
&= -\frac{1}{F_0^2} \left[\lambda_a \lambda_b + \frac{i\check{\phi}_3}{2F_0} [\lambda_3 \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_3] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3] \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{LO, sb}}}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} &= -\frac{F_0^2}{12} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \left\langle \left. \frac{\partial^2 U'}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} + \left. \frac{\partial^2 U'^{\dagger}}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} \right\rangle \\
&\quad + \frac{F_0^2}{4\sqrt{3}} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \left\langle \left(\left. \frac{\partial^2 U'}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} + \left. \frac{\partial^2 U'^{\dagger}}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} \right) \lambda_8 \right\rangle \\
&\quad - \frac{F_0^2}{4} \Delta\chi \left\langle \left(\left. \frac{\partial^2 U'}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} + \left. \frac{\partial^2 U'^{\dagger}}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} \right) \lambda_1 \right\rangle \\
&\quad + \frac{iF_0^2}{4} \rho_3 \left\langle \left(\left. \frac{\partial^2 U'}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} - \left. \frac{\partial^2 U'^{\dagger}}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\Phi}=0} \right) \lambda_3 \right\rangle \\
&= \frac{1}{6} (2(\hat{\chi} + \tilde{\rho}) + \chi_s + \rho_0) \left\langle \lambda_a \lambda_b \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{3}} (\chi_s + \rho_0 - \hat{\chi} - \tilde{\rho}) \left\langle \left[\lambda_a \lambda_b - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3] \right] \lambda_8 \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta\chi \left\langle \left[\lambda_a \lambda_b - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3] \right] \lambda_1 \right\rangle \\
&\quad + \frac{\rho_3 \check{\phi}_3}{4F_0} \left\langle [\lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_a \lambda_b] \lambda_3 \right\rangle + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow H'_{ab} = \mathfrak{M}'_{ab} = \begin{cases} \hat{\chi} + \tilde{\rho} + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 1, 2, 3 \\ \frac{1}{2} \left[\hat{\chi} + \tilde{\rho} + \chi_s + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right] + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 4, 5, 6, 7 \\ \frac{1}{3} \left[\hat{\chi} + \tilde{\rho} + 2(\chi_s + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\hat{\chi}} \right] + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } a = b = 8 \\ \frac{1}{2} \Delta\chi + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } ab = 57, 75, 46, 64 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } ab = 18, 81 \end{cases}$$

Rechnung (VII.a):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NLO}, L_6}^{(2)} &= -L_6 \left[\frac{2}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \mathbb{1} - \frac{1}{2F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \right\rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \right] \lambda_8 \right\rangle + 2\Delta\chi \left\langle \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \right] \lambda_1 \right\rangle \right]^2 \\
&= -16L_6 \left[\frac{1}{2} (2\hat{\chi} + \chi_s) - \frac{1}{12} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_8 \right\rangle - \frac{1}{4} \Delta\chi \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_1 \right\rangle \right]^2 \\
&= \frac{16L_6}{F_0^2} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left[\frac{1}{2} \hat{\chi} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{4} (\hat{\chi} + \chi_s) \vec{K}^2 + \frac{1}{6} (\hat{\chi} + 2\chi_s) \eta_8^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta\chi (K_4 K_6 + K_5 K_7) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi \pi_1 \eta_8 \right] + \text{const.}
\end{aligned}$$

Rechnung (VII.b):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NLO}, W'_6}^{(2)} &= -W'_6 \left[2(2\tilde{\rho} + \rho_0) - \frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_8 \right\rangle + \frac{2}{F_0} \rho_3 \left\langle \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_3 \right\rangle \right]^2 \\
&= \frac{16W'_6}{F_0^2} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left[\frac{1}{2} \tilde{\rho} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{4} (\tilde{\rho} + \rho_0) \vec{K}^2 + \frac{1}{6} (\tilde{\rho} + 2\rho_0) \eta_8^2 - F_0 \rho_3 \pi_3 \right] - 16 \frac{W'_6}{F_0^2} \rho_3^2 \pi_3^2 + \text{const.}
\end{aligned}$$

Rechnung (VII.c):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NLO}, W_6}^{(2)} &= -W_6 \left[2(2\hat{\chi} + \chi_s) - \frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_8 \right\rangle - \Delta\chi \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_1 \right\rangle \right] \\
&\quad \cdot \left[2(2\tilde{\rho} + \rho_0) - \frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left\langle \frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_8 \right\rangle + \frac{2}{F_0} \rho_3 \left\langle \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_3 \right\rangle \right] \\
&= \frac{8W_6}{F_0^2} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left[\frac{1}{2} \tilde{\rho} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{4} (\tilde{\rho} + \rho_0) \vec{K}^2 + \frac{1}{6} (\tilde{\rho} + 2\rho_0) \eta_8^2 - F_0 \rho_3 \pi_3 \right] \\
&\quad + \frac{8W_6}{F_0^2} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left[\frac{1}{2} \hat{\chi} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{4} (\hat{\chi} + \chi_s) \vec{K}^2 + \frac{1}{6} (\hat{\chi} + 2\chi_s) \eta_8^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta\chi (K_4 K_6 + K_5 K_7) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi \pi_1 \eta_8 \right] + \text{const.}
\end{aligned}$$

Rechnung (VIII.a):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NLO},L_7}^{(2)} &= -\frac{4L_7}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \langle i \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle i \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_8 \rangle + \Delta\chi \langle i \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_1 \rangle \right]^2 \\
&= \frac{4L_7}{F_0^2} \left[\Delta\chi \langle \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_1 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_8 \rangle \right]^2 \\
&= \frac{4L_7}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \left[\Delta\chi^2 \langle \lambda_a \lambda_1 \rangle \langle \lambda_b \lambda_1 \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_1 \rangle \langle \lambda_b \lambda_8 \rangle + \frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi})^2 \langle \lambda_a \lambda_8 \rangle \langle \lambda_b \lambda_8 \rangle \right] \phi_a \phi_b \\
&= \frac{16L_7}{F_0^2} \left[\Delta\chi^2 \pi_1^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \Delta\chi \pi_1 \eta_8 + \frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi})^2 \eta_8^2 \right]
\end{aligned}$$

Rechnung (VIII.b):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NLO},W_7'}^{(2)} &= -4W_7' \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \langle \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_8 \rangle - i\rho_3 \langle \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \right] \lambda_3 \rangle \right]^2 \\
&= \frac{4W_7'}{F_0^2} \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_8 \rangle + i\rho_3 \langle \frac{1}{2F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_3 \rangle \right]^2 \\
&= \frac{16W_7'}{3F_0^2} (2\tilde{\rho}^2 - 2\tilde{\rho}\rho_0 + \rho_3^2) \eta_8^2
\end{aligned}$$

Rechnung (VIII.c):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NLO},W_7}^{(2)} &= -4W_7 \left[\Delta\chi \langle \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_1 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_8 \rangle \right] \\
&\quad \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_8 \rangle + i\rho_3 \langle \frac{1}{2F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_3 \rangle \right] \\
&= \frac{4W_7}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \left[\frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi}) (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_8 \rangle \langle \lambda_b \lambda_8 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\chi (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_1 \rangle \langle \lambda_b \lambda_8 \rangle \right] \phi_a \phi_b \\
&= \frac{16W_7}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi}) (\rho_0 - \tilde{\rho}) \eta_8^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\chi (\rho_0 - \tilde{\rho}) \pi_1 \eta_8 \right]
\end{aligned}$$

Rechnung (IX.a):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NLO}, L_8}^{(2)} &= -L_8 \langle [\chi^\dagger U + U^\dagger \chi]^2 \rangle + \text{const.} \\
&= -L_8 \left\langle \left[\frac{1}{3}(2\hat{\chi} + \chi_s) [U + U^\dagger] - \frac{1}{\sqrt{3}}(\chi_s - \hat{\chi}) [\lambda_8 U + U^\dagger \lambda_8] + \Delta\chi [\lambda_1 U + U^\dagger \lambda_1] \right]^2 \right\rangle + \text{const.} \\
&= -L_8 \left[\frac{1}{9}(2\hat{\chi} + \chi_s)^2 \langle [U + U^\dagger]^2 \rangle + \frac{1}{3}(\chi_s - \hat{\chi})^2 \langle \lambda_8 U \lambda_8 U + U^\dagger \lambda_8 U^\dagger \lambda_8 \rangle \right. \\
&\quad + \Delta\chi^2 \langle \lambda_1 U \lambda_1 U + U^\dagger \lambda_1 U^\dagger \lambda_1 \rangle + \frac{2}{3}(2\hat{\chi} + \chi_s) \Delta\chi \langle [U + U^\dagger] [\lambda_1 U + U^\dagger \lambda_1] \rangle \\
&\quad - \frac{2}{3\sqrt{3}}(2\hat{\chi} + \chi_s)(\chi_s - \hat{\chi}) \langle [U + U^\dagger] [\lambda_8 U + U^\dagger \lambda_8] \rangle \\
&\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{3}}(\chi_s - \hat{\chi}) \Delta\chi \langle \lambda_1 U \lambda_8 U + U^\dagger \lambda_8 U^\dagger \lambda_1 \rangle \right] + \text{const.} \\
&= \frac{2L_8}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \left[\frac{2}{9}(2\hat{\chi} + \chi_s)^2 \langle \lambda_a \lambda_b \rangle + \frac{1}{3}(\chi_s - \hat{\chi})^2 \langle \lambda_a \lambda_8 \lambda_b \lambda_8 + \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_s \rangle \right. \\
&\quad + \Delta\chi^2 \langle \lambda_a \lambda_1 \lambda_b \lambda_1 + \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \lambda_1 \rangle - \frac{4}{3\sqrt{3}}(2\hat{\chi} + \chi_s)(\chi_s - \hat{\chi}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle \\
&\quad \left. + \frac{4}{3}(2\hat{\chi} + \chi_s) \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}(\chi_s - \hat{\chi}) \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_1 \lambda_b \lambda_8 + \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \lambda_8 \rangle \right] \phi_a \phi_b + \text{const.} \\
&= \frac{2L_8}{F_0^2} \left[\frac{4}{9} \left[(2\hat{\chi} + \chi_s)^2 + (\chi_s - \hat{\chi})^2 - 2(2\hat{\chi} + \chi_s)(\chi_s - \hat{\chi}) \right] + 4\Delta\chi^2 \right] \pi_1^2 \\
&\quad + \left[\frac{4}{9} \left[(2\hat{\chi} + \chi_s)^2 + (\chi_s - \hat{\chi})^2 - 2(2\hat{\chi} + \chi_s)(\chi_s - \hat{\chi}) \right] \right] \pi_{2,3}^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{9} \left[4(2\hat{\chi} + \chi_s)^2 + (\chi_s - \hat{\chi})^2 + 4(2\hat{\chi} + \chi_s)(\chi_s - \hat{\chi}) \right] + \Delta\chi^2 \right] \vec{K}^2 \\
&\quad + \left[\frac{4}{9} \left[(2\hat{\chi} + \chi_s)^2 + 3(\chi_s - \hat{\chi})^2 + 2(2\hat{\chi} + \chi_s)(\chi_s - \hat{\chi}) \right] + \frac{1}{3}\Delta\chi^2 \right] \eta_8^2 \\
&\quad + \frac{4}{3}\Delta\chi \left[2(2\hat{\chi} + \chi_s) + (\chi_s - \hat{\chi}) \right] (K_4 K_6 + K_5 K_7) \\
&\quad + \frac{8}{3\sqrt{3}}\Delta\chi \left[(2\hat{\chi} + \chi_s) - (\chi_s - \hat{\chi}) \right] \pi_1 \eta_8 \right] + \text{const.} \\
&= \frac{8L_8}{F_0^2} \left[(\hat{\chi}^2 + \Delta\chi^2) \pi_1^2 + \hat{\chi}^2 \pi_{2,3}^2 + \frac{1}{4} (\hat{\chi}^2 + \chi_s^2 + 2\hat{\chi}\chi_s + \Delta\chi^2) \vec{K}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} (\hat{\chi}^2 + 2\chi_s^2 + \Delta\chi^2) \eta_8^2 + (\hat{\chi} + \chi_s) \Delta\chi (K_4 K_6 + K_5 K_7) + \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{\chi} \Delta\chi \pi_1 \eta_8 \right] + \text{const.}
\end{aligned}$$

Rechnung (IX.b):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NLO}, W_8}^{(2)} &= -W_8' \left\langle \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) [U + U^\dagger] - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) [\lambda_8 U + U^\dagger \lambda_8] - i\rho_3 [\lambda_3 U - U^\dagger \lambda_3] \right]^2 \right\rangle \\
&= \frac{2W_8'}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \left[\frac{2}{9} (2\tilde{\rho} + \rho_0)^2 \langle \lambda_a \lambda_b \rangle + \frac{1}{3} (\rho_0 - \tilde{\rho})^2 \langle \lambda_a \lambda_8 \lambda_b \lambda_8 + \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_8 \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3\sqrt{3}} (2\tilde{\rho} + \rho_0) (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle - \rho_3^2 \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_b \lambda_3 + \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right] \phi_a \phi_b \\
&\quad - \frac{8W_8'}{F_0} \sum_{a=1}^8 \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \rho_3 \langle \lambda_a \lambda_3 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \rho_3 \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_8 \rangle \right] \phi_a + \text{const.} \\
&= \frac{8W_8'}{F_0^2} \left[\tilde{\rho}^2 (\pi_1^2 + \pi_2^2) + (\tilde{\rho}^2 - \rho_3^2) \pi_3^2 + \frac{1}{4} (2\tilde{\rho}^2 + 2\tilde{\rho}\rho_0) \vec{K}^2 + \frac{1}{3} (3\tilde{\rho}^2 + \rho_3^2) \eta_8^2 - 2F_0 \tilde{\rho} \rho_3 \pi_3 \right] + \text{const.}
\end{aligned}$$

Rechnung (IX.c):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NLO}, W_8}^{(2)} &= -W_8 \langle [\chi^\dagger U + U^\dagger \chi] [\rho^\dagger U + U^\dagger \rho] \rangle + \text{const.} \\
&= -W_8 \left\langle \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) [U + U^\dagger] - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) [\lambda_8 U + U^\dagger \lambda_8] + \Delta\chi [\lambda_1 U + U^\dagger \lambda_1] \right] \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) [U + U^\dagger] - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) [\lambda_8 U + U^\dagger \lambda_8] - i\rho_3 [\lambda_3 U - U^\dagger \lambda_3] \right] \right\rangle + \text{const.} \\
&= \frac{2W_8}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \left[\frac{2}{9} (2\hat{\chi} + \chi_s) (2\tilde{\rho} + \rho_0) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle - \frac{2}{3\sqrt{3}} (2\hat{\chi} + \chi_s) (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \lambda_8 + \lambda_a \lambda_1 \lambda_b \lambda_8 \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3\sqrt{3}} (2\tilde{\rho} + \rho_0) (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle + \frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi}) (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_8 \lambda_b \lambda_8 + \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_8 \rangle \right] \phi_a \phi_b \\
&\quad - \frac{4W_8}{F_0} \sum_{a=1}^8 \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \rho_3 \langle \lambda_a \lambda_3 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \rho_3 \langle \lambda_a \lambda_8 \lambda_3 \rangle \right] \phi_a + \text{const.} \\
&= \frac{8W_8}{F_0^2} \left[\hat{\chi} \tilde{\rho} \pi^2 + \frac{1}{4} (\hat{\chi} \tilde{\rho} + \hat{\chi} \rho_0 + \chi_s \tilde{\rho} + \chi_s \rho_0) \vec{K}^2 + \frac{1}{3} (\hat{\chi} \tilde{\rho} + 2\chi_s \rho_0) \eta_8^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\tilde{\rho} + \rho_0) \Delta\chi (K_4 K_6 + K_5 K_7) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tilde{\rho} \Delta\chi \pi_1 \eta_8 - F_0 \hat{\chi} \rho_3 \pi_3 \right] + \text{const.}
\end{aligned}$$

Rechnung (X.a):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\text{NLO},L_4} \Big|_{\Phi=0} &= L_4 \left[\frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \langle \lambda_a \lambda_b \rangle (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_b) \right] \langle \exp \left[-\frac{i}{F_0} \lambda_3 \check{\phi}_3 \right] \chi + \exp \left[\frac{i}{F_0} \lambda_3 \check{\phi}_3 \right] \chi^\dagger \rangle \\
&= \frac{4L_4}{F_0^2} \sum_{a=1}^8 (\partial_\mu \phi_a)^2 \langle \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \check{\phi}_3^2 \right] \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \lambda_8 + \Delta\chi \lambda_1 \right] \rangle + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{4L_4}{F_0^2} \sum_{a=1}^8 (\partial_\mu \phi_a)^2 \left[(2\hat{\chi} + \chi_s) - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \langle \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \lambda_3 \lambda_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \lambda_3 \lambda_3 \lambda_8 \right] \rangle \right] + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{4L_4}{F_0^2} \sum_{a=1}^8 (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_a) \left[2\hat{\chi} + \chi_s - \frac{\check{\phi}_3^2}{F_0^2} \hat{\chi} \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (X.b):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\text{NLO},W_4} \Big|_{\Phi=0} &= W_4 \left[\frac{1}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \langle \lambda_a \lambda_b \rangle (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_b) \right] \langle \exp \left[-\frac{i}{F_0} \lambda_3 \check{\phi}_3 \right] \rho + \exp \left[\frac{i}{F_0} \lambda_3 \check{\phi}_3 \right] \rho^\dagger \rangle \\
&= \frac{4W_4}{F_0^2} \sum_{a=1}^8 (\partial_\mu \phi_a)^2 \langle \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \check{\phi}_3^2 \right] \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \lambda_8 \right] + \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 \lambda_3 \lambda_3 \rangle + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{4W_4}{F_0^2} \sum_{a=1}^8 (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_a) \left[2\tilde{\rho} + \rho_0 + \frac{2\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{F_0^2} \tilde{\rho} \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XI.a):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\text{NLO},L_5} \Big|_{\Phi=0} &= \frac{L_5}{F_0^2} \langle \left[\sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \lambda_b (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_b) \right] \left[\chi \exp \left[-\frac{i}{F_0} \lambda_3 \check{\phi}_3 \right] + \exp \left[\frac{i}{F_0} \lambda_3 \check{\phi}_3 \right] \chi \right] \rangle \\
&= \frac{2L_5}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_b) \\
&\quad \cdot \langle \lambda_a \lambda_b \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \check{\phi}_3^2 \right] \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \lambda_8 + \Delta\chi \lambda_1 \right] \rangle + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{2L_5}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_b) \langle \frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \lambda_a \lambda_b - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \lambda_a \lambda_b \lambda_8 + \Delta\chi \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \\
&\quad - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \lambda_8 + \Delta\chi \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \lambda_1 \right] \rangle + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{4L_5}{F_0^2} \left[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 \left[\hat{\chi} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \hat{\chi} \right] + (\partial_\mu \vec{K})^2 \frac{1}{2} \left[\hat{\chi} + \chi_s - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \hat{\chi} \right] + (\partial_\mu \eta_8)^2 \frac{1}{3} \left[\hat{\chi} + 2\chi_s - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \hat{\chi} \right] \right. \\
&\quad + ((\partial_\mu K_4)(\partial_\mu K_6) + (\partial_\mu K_5)(\partial_\mu K_7)) \left[\Delta\chi - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \Delta\chi \right] \\
&\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} (\partial_\mu \pi_1)(\partial_\mu \eta_8) \left[\Delta\chi - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \Delta\chi \right] \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XI.b):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\text{NLO}, W_5} \Big|_{\Phi=0} &= \frac{W_5}{F_0^2} \left\langle \left[\sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \lambda_b (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_b) \right] \left[\rho \exp \left[-\frac{i}{F_0} \lambda_3 \check{\phi}_3 \right] + \exp \left[\frac{i}{F_0} \lambda_3 \check{\phi}_3 \right] \rho^\dagger \right] \right\rangle \\
&= \frac{2W_5}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_b) \\
&\quad \cdot \left\langle \lambda_a \lambda_b \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \check{\phi}_3^2 \right] \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \lambda_8 \right] + \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \right\rangle + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{2W_5}{F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_b) \left\langle \frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \lambda_a \lambda_b - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \lambda_a \lambda_b \lambda_8 + \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \lambda_8 \right] \right\rangle + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{4W_5}{F_0^2} \left[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 \left[\tilde{\rho} + \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \tilde{\rho} \right] \right. \\
&\quad \left. + (\partial_\mu \vec{K})^2 \frac{1}{2} \left[\tilde{\rho} + \rho_0 + \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \tilde{\rho} \right] + (\partial_\mu \eta_8)^2 \frac{1}{3} \left[\tilde{\rho} + 2\rho_0 + \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \rho_3 - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \tilde{\rho} \right] \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XII):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' + U'^\dagger] \Big|_{\Phi=0} &= -\frac{\check{\phi}_3}{F_0^2} [\lambda_a \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_a] + \mathcal{O}(a^3) \\
\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \Big|_{\Phi=0} &= -\frac{2}{F_0^2} \lambda_a \lambda_b + \frac{\check{\phi}_3^2}{4F_0^4} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a \lambda_b] + \mathcal{O}(a^3) \\
\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' - U'^\dagger] \Big|_{\Phi=0} &= \frac{2i}{F_0} \lambda_a - \frac{i\check{\phi}_3^2}{4F_0^3} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_3 + \lambda_a \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a] + \mathcal{O}(a^3) \\
\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \Big|_{\Phi=0} &= -\frac{i\check{\phi}_3}{F_0^3} [\lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_a \lambda_b] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XIII.a):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{NLO}, L_6}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=0} &= -4L_6 \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \left. \frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_8 \rangle \\
&\quad + \Delta\chi \left\langle \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_1 \rangle \Big] \\
&\cdot \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \right\rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \lambda_8 \right\rangle + \Delta\chi \left\langle \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \lambda_1 \right\rangle \Big] \\
&- 2L_6 \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' + U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \left. \left(\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' + U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_8 \rangle + \Delta\chi \left\langle \left. \left(\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' + U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_1 \rangle \Big] \\
&\cdot \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \left. \left(\frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_8 \rangle \\
&\quad + \Delta\chi \left\langle \left. \left(\frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_1 \rangle \Big] + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{8L_6}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \lambda_a \lambda_b \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \right\rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \left[\lambda_a \lambda_b - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3] \right] \lambda_8 \right\rangle \\
&\quad + \Delta\chi \left\langle \left[\lambda_a \lambda_b - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3] \right] \lambda_1 \right\rangle \Big] \\
&\cdot \left[(2\hat{\chi} + \chi_s) \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{3F_0^2} \right] + \frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi}) \frac{\check{\phi}_3^2}{F_0^2} \right] \\
&- \frac{8L_6}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \langle \lambda_a \lambda_3 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_8 \rangle \right] \\
&\cdot \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \langle \lambda_b \lambda_3 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \langle \lambda_b \lambda_3 \lambda_8 \rangle \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XIII.b):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{NLO}, W'_6}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=0} &= -4W'_6 \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \lambda_8 \rangle \\
&\quad - i\rho_3 \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \lambda_3 \rangle \Big] \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left\langle \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left\langle \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \lambda_8 \right\rangle \right] \\
&- 2W'_6 \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' + U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' + U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \lambda_8 \rangle - i\rho_3 \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' - U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \lambda_3 \rangle \Big] \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \lambda_8 \rangle \\
&\quad - i\rho_3 \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right) \right|_{\Phi=0} \lambda_3 \rangle \Big] + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{8W'_6}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle \right] (2\tilde{\rho} + \rho_0) \\
&\quad - \frac{8W'_6}{F_0^2} \rho_3^2 \langle \lambda_a \lambda_3 \rangle \langle \lambda_b \lambda_3 \rangle + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{8W'_6}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (5\tilde{\rho}^2 + 4\tilde{\rho}\rho_0 + \rho_3^2) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} (-\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}\rho_0 + \rho_3^2) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle - \rho_3^2 \langle \lambda_a \lambda_3 \rangle \langle \lambda_b \lambda_3 \rangle \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XIII.c):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{NLO}, W_6}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=0} &= \frac{4W_6}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \langle \lambda_a \lambda_b \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \left[\lambda_a \lambda_b - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3] \right] \lambda_8 \rangle \\
&\quad \left. + \Delta\chi \langle \left[\lambda_a \lambda_b - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3 \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3] \right] \lambda_1 \rangle \right] \left[2\tilde{\rho} + \rho_0 + 2\rho_3 \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \right] \\
&+ \frac{4W_6}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle + \rho_3 \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right] \\
&\quad \cdot \left[(2\hat{\chi} + \chi_s) \left[1 - \frac{\check{\phi}_3^2}{3F_0^2} \right] + \frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi}) \frac{\check{\phi}_3^2}{F_0^2} \right] \\
&- 2W_6 \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \langle \left. \frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' + U'^{\dagger}] \right|_{\Phi=0} \rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \left. \left(\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' + U'^{\dagger}] \right) \Big|_{\Phi=0} \lambda_8 \rangle + \Delta\chi \langle \left. \left(\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' + U'^{\dagger}] \right) \Big|_{\Phi=0} \lambda_1 \rangle \right] \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \langle \left. \frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' + U'^{\dagger}] \right|_{\Phi=0} \rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \left. \left(\frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' + U'^{\dagger}] \right) \Big|_{\Phi=0} \lambda_8 \rangle \\
&\quad \left. - i\rho_3 \langle \left. \left(\frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' - U'^{\dagger}] \right) \Big|_{\Phi=0} \lambda_3 \rangle \right] + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{4W_6}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle + \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \rangle \right] \left[2\tilde{\rho} + \rho_0 + \frac{2\rho_3^2}{\hat{\chi}} \right] \\
&+ \frac{4W_6}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle + \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right] (2\hat{\chi} + \chi_s) \\
&+ \frac{8W_6}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \check{\phi}_3 \langle \lambda_a \lambda_3 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \check{\phi}_3 \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_8 \rangle \right] \left[\rho_3 \frac{1}{F_0} \langle \lambda_b \lambda_3 \rangle \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XIV.a):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{NLO}, L_7}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=0} &= -4L_7 \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right) \Big|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_8 \rangle \\
&\quad + \Delta\chi \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right) \Big|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_1 \rangle \Big] \\
&\quad \cdot \left[-\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \frac{i\check{\phi}_3}{F_0} \lambda_3 \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \frac{i\check{\phi}_3}{F_0} \lambda_3 \lambda_8 \right\rangle - \Delta\chi \left\langle \frac{i\check{\phi}_3}{F_0} \lambda_3 \lambda_1 \right\rangle \right] \\
&- 2L_7 \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' - U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' - U'^\dagger] \right) \Big|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_8 \rangle + \Delta\chi \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \phi_a} [U' - U'^\dagger] \right) \Big|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_1 \rangle \Big] \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right) \Big|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_8 \rangle \\
&\quad + \Delta\chi \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right) \Big|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_1 \rangle \Big] + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{8L_7}{F_0^2} \left[-\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \lambda_a \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \lambda_8 \rangle + \Delta\chi \left\langle \left[\lambda_a - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_3 + 2\lambda_a \lambda_3 \lambda_3] \right] \lambda_1 \right\rangle \right] \\
&\quad \cdot \left[-\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \langle \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \lambda_b \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \lambda_8 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \Delta\chi \left\langle \left[\lambda_b - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_b \lambda_3 + 2\lambda_b \lambda_3 \lambda_3] \right] \lambda_1 \right\rangle \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XIV.b):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{NLO}, W_7}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=0} &= -4W_7' \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right|_{\Phi=0} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' - U'^\dagger] \right) \Big|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_8 \rangle \\
&\quad - i\rho_3 \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_a \partial \phi_b} [U' + U'^\dagger] \right) \Big|_{\Phi=0} \right\rangle \lambda_3 \rangle \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left\langle \frac{i\check{\phi}_3}{F_0} \lambda_3 \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left\langle \frac{i\check{\phi}_3}{F_0} \lambda_3 \lambda_8 \right\rangle - i\rho_3 \left\langle \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \lambda_3 \right\rangle \right] \\
&\quad + \frac{8W_7'}{F_0^2} \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_8 \rangle + i\rho_3 \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right] \\
&\quad \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_b \lambda_8 \rangle + i\rho_3 \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \langle \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right] + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{8W_7'}{3F_0^2} (2\tilde{\rho}^2 - 2\tilde{\rho}\rho_0 + \rho_3^2) \langle \lambda_a \lambda_8 \rangle \langle \lambda_b \lambda_8 \rangle + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XIV.c):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{NLO}, W_7}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=0} &= \frac{8W_7'}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \langle \lambda_a \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \lambda_a \left[\mathbb{1} - \frac{\check{\phi}_3^2}{2F_0^2} \lambda_3 \lambda_3 \right] \lambda_8 \rangle - \Delta\chi \left\langle \left[\lambda_a - \frac{\check{\phi}_3^2}{8F_0^2} [2\lambda_3 \lambda_a \lambda_3 + 2\lambda_a \lambda_3 \lambda_3] \right] \lambda_1 \right\rangle \right] \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_b \lambda_8 \rangle - \rho_3 \frac{\check{\phi}_3}{F_0} \langle \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right] + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{8W_7'}{F_0^2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \lambda_a \lambda_8 \rangle - \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_1 \rangle \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_b \lambda_8 \rangle - \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} \langle \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 \rangle \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XV.a):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{NLO}, L_8}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=0} &= \frac{2L_8}{F_0^2} \left\langle \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left[U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \right] \right. \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left[\lambda_8 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_8 \right] \\
&\quad + \Delta\chi \left[\lambda_1 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \right] \left. \right] \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left[U_0 + U_0^{-1} \right] - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left[\lambda_8 U_0 + U_0^{-1} \lambda_8 \right] + \Delta\chi \left[\lambda_1 U_0 + U_0^{-1} \lambda_1 \right] \right] \rangle \\
&+ \frac{2L_8}{F_0^2} \left\langle \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left[U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{-\frac{1}{2}} \right] \right. \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left[\lambda_8 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_8 \right] \\
&\quad + \Delta\chi \left[\lambda_1 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \right] \left. \right] \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left[U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \right] \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left[\lambda_8 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_8 \right] \\
&\quad + \Delta\chi \left[\lambda_1 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \right] \left. \right] \rangle \\
&= \frac{2L_8}{F_0^2} \left[\frac{1}{9} (2\hat{\chi} + \chi_s)^2 \langle \lambda_a \lambda_b \left[U_0^2 + U_0^{-2} \right] + \lambda_a U_0 \lambda_b U_0 + \lambda_a U_0^{-1} \lambda_b U_0^{-1} \rangle \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi})^2 \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_8 \left[U_0^2 + U_0^{-2} \right] + \lambda_a \lambda_8 U_0 \lambda_b \lambda_8 U_0 + \lambda_a \lambda_8 U_0^{-1} \lambda_b \lambda_8 U_0^{-1} \rangle \\
&\quad - \frac{2}{3\sqrt{3}} (2\hat{\chi} + \chi_s) (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \left[U_0^2 + U_0^{-2} \right] + \lambda_a \lambda_8 U_0 \lambda_b U_0 + \lambda_a \lambda_8 U_0^{-1} \lambda_b U_0^{-1} \rangle \\
&\quad + \Delta\chi^2 \langle \left[\lambda_1 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_1 U_0 + \lambda_1 U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 U_0^{-1} \right. \\
&\quad \quad \left. + \lambda_1 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_1 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + \lambda_1 U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \right] \rangle \\
&\quad + \frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \Delta\chi \langle \left[U_0^{\frac{3}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{3}{2}} + U_0^{-\frac{3}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{3}{2}} \right. \\
&\quad \quad \left. + 2U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a U_0 \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + 2U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{-1} \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \right] \lambda_1 \rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \Delta\chi \langle \left[U_0^{\frac{3}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{3}{2}} \right. \\
&\quad \quad \left. + U_0^{-\frac{3}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{3}{2}} \right] \lambda_1 \lambda_8 \\
&\quad \quad \left. + 2U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_1 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_8 + 2U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_8 \right] \rangle \left. \right] \\
&= \dots
\end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{4L_8}{F_0^2} \left[\frac{1}{9} (2\hat{\chi} + \chi_s)^2 \langle 2\lambda_a \lambda_b - \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}^2} [3\lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_a \lambda_3 \lambda_b \lambda_3] \rangle \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} (\chi_s - \hat{\chi})^2 \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_8 + \lambda_a \lambda_8 \lambda_b \lambda_8 - \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}^2} [2\lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_8 \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_a \lambda_8 \lambda_b \lambda_8 \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_a \lambda_8 \lambda_3 \lambda_b \lambda_8 \lambda_3] \rangle \\
&\quad - \frac{2}{3\sqrt{3}} (2\hat{\chi} + \chi_s) (\chi_s - \hat{\chi}) \langle 2\lambda_a \lambda_b \lambda_8 - \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}^2} [2\lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_a \lambda_8 \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_a \lambda_8 \lambda_3 \lambda_b \lambda_3] \rangle \\
&\quad + \Delta\chi^2 \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \lambda_1 + \lambda_a \lambda_1 \lambda_b \lambda_1 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \Delta\chi \langle 4\lambda_a \lambda_b \lambda_1 - \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}^2} [\lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_3 \lambda_3 \lambda_b] \lambda_1 \rangle \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \Delta\chi \langle 2\lambda_a \lambda_b \lambda_1 \lambda_8 + 2\lambda_a \lambda_1 \lambda_b \lambda_8 - \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}^2} [\lambda_a \lambda_b \lambda_1 \lambda_8 + \lambda_a \lambda_1 \lambda_b \lambda_8 \lambda_3 \lambda_3] \rangle + \mathcal{O}(a^3) \right]
\end{aligned}$$

Rechnung (XV.b):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{NLO}, W'_8}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=0} &= \frac{4W'_8}{F_0^2} \left\langle \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \lambda_a \lambda_b - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \right] \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \lambda_8 \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{2W'_8}{F_0^2} \left\langle \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) [\lambda_8 \lambda_a - \lambda_a \lambda_8] - i\rho_3 [\lambda_3 \lambda_a + \lambda_a \lambda_3] \right] \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) [\lambda_8 \lambda_b - \lambda_b \lambda_8] - i\rho_3 [\lambda_3 \lambda_b + \lambda_b \lambda_3] \right] \right\rangle + \mathcal{O}(a^3) \\
&= \frac{4W'_8}{F_0^2} \left[\frac{2}{9} (5\tilde{\rho}^2 + 4\tilde{\rho}\rho_0 + \rho_3^2) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle + \frac{1}{3} (2\tilde{\rho}^2 - 2\tilde{\rho}\rho_0 + \rho_3^2) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_8 + \lambda_a \lambda_8 \lambda_b \lambda_8 \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3\sqrt{3}} (-\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}\rho_0 + \rho_3^2) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle - \rho_3^2 \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_a \lambda_3 \lambda_b \lambda_3 \rangle \right] + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XV.c):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}'_{\text{NLO}, W_8}}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\Phi=0} &= \frac{W_8}{F_0^2} \left\langle \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left[U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \right] \right. \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left[\lambda_8 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_8 \right] \\
&\quad + \Delta\chi \left[\lambda_1 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \right] \\
&\quad \cdot \left. \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \lambda_8 + \rho_3^2 \hat{\chi} \lambda_3 \lambda_3 \right] \right\rangle \\
&+ \frac{W_8}{F_0^2} \left\langle \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left[U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \right] \right. \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left[\lambda_8 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_8 \right] \\
&\quad - i\rho_3 \left[\lambda_3 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_3 \right] \\
&\quad \cdot \left. \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \right] \right\rangle \\
&+ \frac{2W_8}{F_0^2} \left\langle \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \left[U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{-\frac{1}{2}} \right] \right. \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \left[\lambda_8 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_8 \right] \\
&\quad + \Delta\chi \left[\lambda_1 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_a U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \right] \\
&\quad \cdot \left. \left[\frac{1}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \left[U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \right] \right. \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \left[\lambda_8 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} - U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_8 \right] \\
&\quad \left. \left. - i\rho_3 \left[\lambda_3 U_0^{\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{\frac{1}{2}} + U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_b U_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_3 \right] \right] \right\rangle \\
&= \frac{2W_8}{F_0^2} \left[\frac{4}{9} (2\hat{\chi} + \chi_s) (2\tilde{\rho} + \rho_0) \langle \lambda_a \lambda_b \rangle + \frac{2}{3} (\chi_s - \hat{\chi}) (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_8 + \lambda_a \lambda_8 \lambda_b \lambda_8 \rangle \right. \\
&\quad - \frac{4}{3\sqrt{3}} (2\hat{\chi} + \chi_s) (\rho_0 - \tilde{\rho}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle - \frac{4}{3\sqrt{3}} (2\tilde{\rho} + \rho_0) (\chi_s - \hat{\chi}) \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_8 \rangle \\
&\quad \left. + \frac{4}{3} (2\tilde{\rho} + \rho_0) \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \rangle - \frac{2}{\sqrt{3}} (\rho_0 - \tilde{\rho}) \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \lambda_8 + \lambda_a \lambda_1 \lambda_b \lambda_8 \rangle \right] \\
&+ \frac{4W_8}{F_0^2} \left[\frac{1}{3} (2\hat{\chi} + \chi_s) \langle 3\lambda_a \lambda_b \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_a \lambda_3 \lambda_b \lambda_3 \rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_s - \hat{\chi}) \langle 2\lambda_a \lambda_b \lambda_8 \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_a \lambda_3 \lambda_8 \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_a \lambda_8 \lambda_b \lambda_3 \rangle \\
&\quad \left. + \Delta\chi \langle \lambda_a \lambda_b \lambda_1 \lambda_3 \lambda_3 + \lambda_a \lambda_3 \lambda_1 \lambda_b \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_a \lambda_1 \lambda_b \lambda_3 \rangle \right] \frac{\rho_3^2}{\hat{\chi}} + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Rechnung (XVI.a):

$$\begin{aligned}
U^{(4)} &= \mathbb{1} + \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a - \frac{1}{2F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \\
&\quad - \frac{i}{6F_0^3} \sum_{a,b,c=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_c \phi_c + \frac{1}{24F_0^4} \sum_{a,b,c,d=1}^8 \lambda_a \phi_a \lambda_b \phi_b \lambda_c \phi_c \lambda_d \phi_d \\
\Rightarrow \partial_\mu U &= \frac{i}{F_0} \sum_{a=1}^8 \lambda_a (\partial_\mu \phi_a) - \frac{1}{2F_0^2} \sum_{a,b=1}^8 \lambda_a \lambda_b [(\partial_\mu \phi_a) \phi_b + \phi_a (\partial_\mu \phi_b)] \\
&\quad - \frac{i}{6F_0^3} \sum_{a,b,c=1}^8 \lambda_a \lambda_b \lambda_c [(\partial_\mu \phi_a) \phi_b \phi_c + \phi_a (\partial_\mu \phi_b) \phi_c + \phi_a \phi_b (\partial_\mu \phi_c)] \\
&\quad + \frac{1}{24F_0^4} \sum_{a,b,c,d=1}^8 \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d [(\partial_\mu \phi_a) \phi_b \phi_c \phi_d + \phi_a (\partial_\mu \phi_b) \phi_c \phi_d + \phi_a \phi_b (\partial_\mu \phi_c) \phi_d + \phi_a \phi_b \phi_c (\partial_\mu \phi_d)] \\
\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{LO,der}}^{(4)} &= \frac{1}{4} \sum_{a,b=1}^8 \langle \lambda_a \lambda_b \rangle (\partial_\mu \phi_a) (\partial_\mu \phi_b) \\
&\quad - \frac{1}{4F_0^2} \left\langle \sum_{a,b,c,d=1}^8 \phi_a (\partial_\mu \phi_b) \phi_c (\partial_\mu \phi_d) \left[\frac{1}{3} [\lambda_a \lambda_d \lambda_b \lambda_c + \lambda_a \lambda_d \lambda_c \lambda_b + \lambda_a \lambda_c \lambda_d \lambda_b] \right. \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. - \frac{1}{4} [\lambda_a \lambda_d \lambda_c \lambda_b + \lambda_a \lambda_c \lambda_d \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_d \lambda_c + \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d] \right] \right\rangle \\
\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{LO,der}}^{\text{WW}} &= \frac{1}{48F_0^2} \sum_{a,b,c,d=1}^8 \phi_a (\partial_\mu \phi_b) \phi_c (\partial_\mu \phi_d) \langle [\lambda_a, \lambda_b] [\lambda_c, \lambda_d] \rangle \\
&\stackrel{\text{(C.2)}}{=} - \frac{1}{12F_0^2} \sum_{a,b,c,d=1}^8 \phi_a (\partial_\mu \phi_b) \phi_c (\partial_\mu \phi_d) \langle \mathbf{f}_{abe} \mathbf{f}_{cdf} \lambda_e \lambda_f \rangle \\
&= - \frac{1}{6F_0^2} \sum_{a,b,c,d=1}^8 \phi_a (\partial_\mu \phi_b) \phi_c (\partial_\mu \phi_d) \mathbf{f}_{abe} \mathbf{f}_{cde} \\
&\stackrel{\text{(C.8)}}{=} - \frac{1}{6F_0^2} \sum_{a,b,c,d=1}^8 \phi_a (\partial_\mu \phi_b) \phi_c (\partial_\mu \phi_d) \left[\frac{2}{3} (\delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc}) + \mathbf{d}_{ace} \mathbf{d}_{bde} - \mathbf{d}_{ade} \mathbf{d}_{bce} \right]
\end{aligned}$$

Rechnung (XVII):

$$iG_{\pi\eta}^{-1}(k^2) = \begin{pmatrix} k^2 + \bar{m}_\pi^2 & \frac{B_0}{\sqrt{3}}\Delta m \\ \frac{B_0}{\sqrt{3}}\Delta m & k^2 + \bar{m}_\eta^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G_{\pi\eta}(k^2) = \frac{i}{(k^2 + \bar{m}_\pi^2)(k^2 + \bar{m}_\eta^2) - \frac{B_0^2}{3}\Delta m^2} \begin{pmatrix} k^2 + \bar{m}_\eta^2 & -\frac{B_0}{\sqrt{3}}\Delta m \\ -\frac{B_0}{\sqrt{3}}\Delta m & k^2 + \bar{m}_\pi^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_{18,81}(k^2) &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \frac{B_0(m_d - m_u)}{(k^2 + \bar{m}_\pi^2)(k^2 + \bar{m}_\eta^2)} + \mathcal{O}(\Delta m^3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{B_0(m_d - m_u)}{\bar{m}_\eta^2 - \bar{m}_\pi^2} \left[\frac{i}{k^2 + \bar{m}_\eta^2} - \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^3) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_d - m_u}{2m_s - m_u - m_d} \left[\frac{i}{k^2 + \bar{m}_\eta^2} - \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} \right] g_{\pi\eta}(a, a^2) + \mathcal{O}(\Delta m^3, a^3), \end{aligned}$$

mit $g_{\pi\eta}(a, a^2) := 1 - \frac{2aW_0(1 - \cos(\omega)) - \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)}}{B_0(2m_s - m_u - m_d)} + \frac{4a^2W_0^2(1 - \cos(\omega))^2}{B_0^2(2m_s - m_u - m_d)^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_{11}(k^2) &= \frac{i(k^2 + \bar{m}_\eta^2)}{(k^2 + \bar{m}_\pi^2)(k^2 + \bar{m}_\eta^2) - \frac{B_0^2}{3}\Delta m^2} \\ &= \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} + \frac{\frac{iB_0^2}{3}\Delta m^2}{(k^2 + \bar{m}_\pi^2)(k^2 + \bar{m}_\eta^2)(k^2 + \bar{m}_\pi^2)} + \mathcal{O}(\Delta m^4) \\ &= \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} - \frac{1}{2} \frac{B_0(m_d - m_u)^2}{2m_s - m_u - m_d} \left[\frac{1}{k^2 + \bar{m}_\eta^2} - \frac{1}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} \right] \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} g_{\pi\eta}(a, a^2) + \mathcal{O}(\Delta m^4, a^3) \\ &= \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} + \frac{3}{4} \frac{B_0(m_d - m_u)^2}{(2m_s - m_u - m_d)^2} \left[\frac{i}{k^2 + \bar{m}_\eta^2} - \frac{i}{k^2 + \bar{m}_\pi^2} \right] g_{\pi\eta}^2(a, a^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{B_0(m_d - m_u)^2}{2m_s - m_u - m_d} \left[\frac{i}{(k^2 + \bar{m}_\pi^2)(k^2 + \bar{m}_\eta^2)} \right] g_{\pi\eta}(a, a^2) + \mathcal{O}(\Delta m^4, a^3) \end{aligned}$$

Rechnung (XVIII.a):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} - z & \frac{x-y}{2} \\ \frac{x-y}{2} & \frac{x+y}{2} + z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{a}_{44,55}^S &= \frac{\bar{m}_K^2}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} + \frac{I(\bar{m}_K^2)}{2} - \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{12} \right] \\ &\quad - \frac{m_d - m_u}{F_0^2} \frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \left[\left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{6} + \frac{\bar{m}_K^2}{12} \right] I(\bar{m}_\pi^2) + \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{12} - \frac{\bar{m}_K^2}{12} - \frac{\bar{m}_\eta^2}{4} \right] I(\bar{m}_\eta^2) \right] \\ &\quad - \frac{B_0(m_d - m_u)}{F_0^2} \left[\frac{\bar{m}_K^2}{6} \frac{1}{32\pi^2} \left[\ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] + 1 \right] + \frac{5I(\bar{m}_\pi^2)}{24} + \frac{I(\bar{m}_K^2)}{4} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{24} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{66,77}^S &= \frac{\bar{m}_K^2}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} + \frac{I(\bar{m}_K^2)}{2} - \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{12} \right] \\ &\quad + \frac{m_d - m_u}{F_0^2} \frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \left[\left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{6} + \frac{\bar{m}_K^2}{12} \right] I(\bar{m}_\pi^2) + \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{12} - \frac{\bar{m}_K^2}{12} - \frac{\bar{m}_\eta^2}{4} \right] I(\bar{m}_\eta^2) \right] \\ &\quad + \frac{B_0(m_d - m_u)}{F_0^2} \left[\frac{\bar{m}_K^2}{6} \frac{1}{32\pi^2} \left[\ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] + 1 \right] + \frac{5I(\bar{m}_\pi^2)}{24} + \frac{I(\bar{m}_K^2)}{4} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{24} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3) \end{aligned}$$

$$\hat{a}_{46,64,57,75}^S = \frac{B_0(m_d - m_u)}{F_0^2} \frac{\bar{m}_K^2}{3} \frac{1}{32\pi^2} \left[\ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] + 1 \right] + \mathcal{O}(\Delta m^3, a^3)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_{44,55}^S &= \frac{1}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} + \frac{I(\bar{m}_K^2)}{2} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{4} \right] \\ &\quad + \frac{m_d - m_u}{F_0^2} \left[\frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} - \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{4} \right] + \frac{1}{6} \frac{B_0}{32\pi^2} \left[\ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] + 1 \right] \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_{66,77}^S &= \frac{1}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} + \frac{I(\bar{m}_K^2)}{2} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{4} \right] \\ &\quad - \frac{m_d - m_u}{F_0^2} \left[\frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{4} - \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{4} \right] + \frac{1}{6} \frac{B_0}{32\pi^2} \left[\ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] + 1 \right] \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3) \end{aligned}$$

$$\hat{b}_{46,64,57,75}^S = - \frac{B_0(m_d - m_u)}{F_0^2} \frac{1}{3} \frac{1}{32\pi^2} \left[\ln \left[\frac{\bar{m}_K^2}{\Lambda^2} \right] + 1 \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3)$$

Rechnung (XVIII.b):

$$\frac{\{\hat{b}^S, m^2\}}{2} \Big|_{44,55} = m_{K_4, K_5}^2 \hat{b}_{44,55}^S = \left[\bar{m}_K^2 - \frac{B_0(m_d - m_u)}{2} \right] \hat{b}_{44,55}^S$$

$$\frac{\{\hat{b}^S, m^2\}}{2} \Big|_{66,77} = m_{K_6, K_7}^2 \hat{b}_{66,77}^S = \left[\bar{m}_K^2 + \frac{B_0(m_d - m_u)}{2} \right] \hat{b}_{66,77}^S$$

$$\frac{\{\hat{b}^S, m^2\}}{2} \Big|_{46,64,57,75} = \bar{m}_K^2 \hat{b}_{46,64,57,75}^S$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_{K_4, K_5}^2 \hat{b}_{44,55}^S - \hat{a}_{44,55}^S &= \frac{\bar{m}_K^2 I(\bar{m}_\eta^2)}{F_0^2} \frac{1}{3} - \frac{B_0(m_d - m_u)}{F_0^2} \left[\frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{8} + \frac{I(\bar{m}_K^2)}{4} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{8} \right] \\ &+ \frac{m_d - m_u}{F_0^2} \frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \left[\left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{6} + \frac{\bar{m}_K^2}{3} \right] I(\bar{m}_\pi^2) + \left[\frac{\bar{m}_\pi^2}{6} - \frac{2\bar{m}_K^2}{3} \right] I(\bar{m}_\eta^2) \right] \\ &+ \frac{B_0(m_d - m_u)}{F_0^2} \left[\frac{5I(\bar{m}_\pi^2)}{24} + \frac{I(\bar{m}_K^2)}{4} + \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{24} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3) \\ &= \frac{\bar{m}_K^2 I(\bar{m}_\eta^2)}{F_0^2} \frac{1}{3} \\ &- \frac{B_0(m_d - m_u)}{F_0^2} \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{6} \\ &- \frac{m_d - m_u}{F_0^2} \frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \bar{m}_K^2 \left[\frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{2} - \frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{2} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_{K_6, K_7}^2 \hat{b}_{66,77}^S - \hat{a}_{66,77}^S &= \frac{\bar{m}_K^2 I(\bar{m}_\eta^2)}{F_0^2} \frac{1}{3} \\ &+ \frac{B_0(m_d - m_u)}{F_0^2} \frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{6} \\ &+ \frac{m_d - m_u}{F_0^2} \frac{g_{\pi\eta}(a, a^2)}{2m_s - m_u - m_d} \bar{m}_K^2 \left[\frac{I(\bar{m}_\eta^2)}{2} - \frac{I(\bar{m}_\pi^2)}{2} \right] + \mathcal{O}(\Delta m^2, a^3) \end{aligned}$$

Rechnung (XIX):

$$\begin{aligned}
\frac{d\dot{M}_{ns}^2}{d\Lambda} &= \frac{1}{16\pi^2\Lambda} \left[\frac{B_0^2}{F_0^2} \frac{8}{9} \left[\left(\frac{6}{8} + \frac{3}{8} + \frac{132}{144} - \frac{30}{48} \right) [m_u^2 + m_d^2] + \left(\frac{24}{8} + \frac{48}{8} - \frac{528}{144} - \frac{240}{48} \right) m_s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{12}{8} + \frac{6}{8} - \frac{264}{144} - \frac{60}{48} \right) m_u m_d + \left(\frac{30}{8} + \frac{24}{8} - \frac{660}{144} \right) [m_u + m_d] m_s \right] \\
&\quad + \frac{aB_0W_0}{F_0^2} \frac{16}{9} \left[\left(\frac{12}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} - \frac{330}{144} \right) [m_u + m_d] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{12}{8} + \frac{24}{8} + \frac{12}{8} + \frac{24}{8} - \frac{528}{144} - \frac{240}{48} \right) m_s \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{6}{8} + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} - \frac{264}{144} - \frac{60}{48} \right) [m_u + m_d] \cos(\omega) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{6}{8} + \frac{12}{8} + \frac{24}{8} + \frac{12}{8} - \frac{660}{144} \right) m_s \cos(\omega) \right] \\
&\quad + \frac{a^2W_0^2}{F_0^2} \frac{32}{9} \left[\frac{12}{8} + \frac{15}{8} - \frac{132}{144} - \frac{30}{48} + \left(\frac{15}{8} + \frac{12}{8} - \frac{330}{144} \right) \cos(\omega) + \left(-\frac{132}{144} - \frac{60}{48} \right) \cos^2(\omega) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{132}{144} + \frac{60}{48} - \frac{264}{144} - \frac{120}{48} \right) \sin^2(\omega) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{9}{8} + \frac{330}{144} + \frac{24}{8} + \frac{12}{8} - \frac{660}{144} \right) \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2F_0^2} \left[\bar{m}_\pi^2 \left[\underbrace{2\bar{m}_\pi^2 - \frac{4}{3}\bar{m}_K^2 - \frac{2}{3}\bar{m}_\eta^2}_{=\frac{20}{9}[\bar{m}_\pi^2 - \bar{m}_K^2]} \right] + \bar{m}_\eta^2 \left[\underbrace{4\bar{m}_K^2 + \frac{4}{3}\bar{m}_\eta^2}_{=-\frac{4}{9}[2\bar{m}_\pi^2 + \bar{m}_K^2]} \right] \right] \\
&= \frac{1}{16\pi^2\Lambda} \left[\frac{B_0^2}{F_0^2} \frac{2}{9} \left[-\frac{5}{3} [m_u + m_d]^2 + \frac{4}{3} m_s^2 + \frac{26}{3} [m_u + m_d] m_s \right] \right. \\
&\quad + \frac{aB_0W_0}{F_0^2} \frac{4}{9} \left[\frac{13}{3} [m_u + m_d] + \frac{4}{3} m_s - \frac{10}{3} [m_u + m_d] \cos(\omega) + \frac{26}{3} m_s \cos(\omega) \right] \\
&\quad + \frac{a^2W_0^2}{F_0^2} \frac{8}{9} \left[-\frac{4}{3} + \frac{13}{3} \left[\frac{m_s}{m_u + m_d} \right] \sin^2(\omega) \right] \\
&\quad + \frac{1}{F_0^2} \frac{2}{9} \left[5 \left[B_0(m_u + m_d) + 2aW_0 \cos(\omega) + 2 \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[B_0 \left(\frac{m_u + m_d}{2} - m_s \right) - aW_0(1 - \cos(\omega)) + \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{3} \left[B_0(m_u + m_d + 4m_s) + 2aW_0(2 + \cos(\omega)) + 2 \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \right] \\
&\quad \left. \cdot \left[B_0 \left(\frac{5(m_u + m_d)}{2} - m_s \right) + aW_0(1 + 5 \cos(\omega)) + 5 \frac{a^2W_0^2 \sin^2(\omega)}{B_0(m_u + m_d)} \right] \right] \\
&= 0 + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned}$$

Literatur

- [1] S. SCHERER, M. R. SCHINDLER:
A Primer for Chiral Perturbation Theory
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [2] D. KHARZEEV:
QCD and Heavy Ions
Nucl. Phys. A699 (2002) 95,
arXiv:nucl-th/0107033v1, 11. Juli 2001.
- [3] C. GATtringER, C.B. LANG:
Quantumchromodynamics on the Lattice
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [4] M. DINE:
TASI Lectures in The Strong CP Problem
arXiv:hep-ph/0011376v2, 30. November 2000.
- [5] W. PAULI:
Niels Bohr and the Development of Physics
Exclusion Principle, Lorentz group and reflexion of space-time and charge
Pergamon Press Ltd., London, 1955.
- [6] V.B. BERESTETSKII, E.M. LIFSHITZ, L.P. PITAEVSKII:
Course of Theoretical Physics Volume 4: Quantum Electrodynamics; 2. Auflage
Übersetzt aus dem Russischen
Pergamon Press GmbH, Kronberg-Taunus, 1982.
- [7] P. J. MOHR, B. N. TAYLOR, D. B. NEWELL:
CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2010
Rev. Mod. Phys. 85 (2012) 1527,
arXiv:physics.atom-ph/1203.5425v1, 24. März 2012.
- [8] M.E. PESKIN D.V. SCHROEDER:
An Introduction to Quantum Field Theory
Westview Press, USA, 1995.
- [9] E. REBHAN:
Theoretische Physik: Relativistische Quantenmechanik,
Quantenfeldtheorie und Elementarteilchentheorie
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [10] R. JACKIW:
John Bell's Observations on the Chiral Anomaly
and Some Properties of Its Descendants
Vortrag anlässlich des Bell Memorial Meetings, Wien, Österreich,
arXiv:hep-th/0011274v1, 29. November 2000.
- [11] N. BEISERT, B. BORASOY:
The $\eta' \rightarrow \eta\pi\pi$ decay in $U(3)$ chiral perturbation theory
Nucl. Phys. A705 (2002) 433,
arXiv:hep-ph/0201289v1, 30. Januar 2002.

- [12] T. CSÖRGŐ, R. VÉRTESI, J.SZIKLAI:
Indirect observation of an in-medium η' mass reduction in $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions
Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 182301,
arXiv:nucl-ex/0912.5526v2, 22. September 2010.
- [13] M. GELL-MANN, Y. NE'EMAN:
The Eightfold Way
W.A. Benjamin, New-York Amsterdam, 1964.
- [14] S. COLEMAN:
The Invariance of the Vacuum is the Invariance of the World
J. Math. Phys. 7 (1966) 787.
- [15] J. BERINGER ET AL. (PARTICLE DATA GROUP):
Review of Particle Physics
Phys. Rev. D86 (2012) 010001.
- [16] L.H. RYDER:
Quantum Field Theory
Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [17] S. SCHERER:
Introduction to Chiral Perturbation Theory
Adv. Nucl. Phys. 27 (2003) 277,
arXiv:hep-ph/0210398v1, 29. Oktober 2002.
- [18] S. WEINBERG:
Phenomenological Lagrangians
Physica A96, (1979) 173.
- [19] M. GELL-MANN, R.J. OAKES, B. RENNER:
Behavior of current divergences under $SU(3) \times SU(3)$
Phys. Rev. 175 (1968) 2195.
- [20] J. GASSER AND H. LEUTWYLER:
Chiral perturbation theory: expansions in the mass of the strange quark
Nucl. Phys. B250 (1984) 465.
- [21] J. BIJNENS:
Quark Mass dependence at Two Loops for Meson Properties
PoS LAT2007 004 (2007),
arXiv:hep-lat/0708.1377v2, 28. August 2007.
- [22] A. DOBADO, A. GOMEZ-NICOLA, A.L. MAROTO, J.R. PELAEZ:
Effective Lagrangians for the Standard Model
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [23] G. AMOROS, J. BIJNENS, P. TALAVERA:
Two-point Functions at Two Loops in Three Flavour Chiral Perturbation Theory
Nucl. Phys. B568 319 (2000),
arXiv:hep-ph/9907264v1, 7. Juli 1999.

- [24] G. MÜNSTER, M. WALZL:
Lattice Gauge Theory - A Short Primer
Vorlesung im Rahmen der PSI Zuoz Summer School, Zuoz, Schweiz,
arXiv:hep-lat/0012005v1, 5. Dezember 2000.
- [25] N. B. NIELSEN, M. NINOMIYA:
No Go Theorem for Regularizing Chiral Fermions
Phys. Lett. B105 (1981) 219.
- [26] M. LÜSCHER:
Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg-Wilson relation
Phys. Lett. B428 (1998) 342,
arXiv:hep-lat/9802011v1, 10. Februar 1998.
- [27] M. LÜSCHER, S. SINT, R. SOMMER, P. WEISZ:
Chiral symmetry and $\mathcal{O}(a)$ improvement in lattice QCD
Nucl. Phys. B478 (1996) 365,
arXiv:hep-lat/9605038v1, 29. Mai 1996.
- [28] R. FREZZOTTI:
Wilson fermions with chirally twisted mass
Nucl. Phys. B119 (2003) 140,
arXiv:hep-lat/0210007v1, 4. Oktober 2002.
- [29] R. FREZZOTTI, G.C. ROSSI:
Twisted-mass lattice QCD with mass non-degenerate quarks
Nucl. Phys. B128 (2004) 193,
arXiv:hep-lat/0311008v2, 10. Dezember 2003.
- [30] R. FREZZOTTI, G.C. ROSSI:
Chirally improving Wilson fermions
Nucl. Phys. B129-B130 (2004) 880,
arXiv:hep-lat/0309157v1, 24. September 2003.
- [31] R. FREZZOTTI, G.C. ROSSI:
Chirally improving Wilson fermions I. $\mathcal{O}(a)$ improvement
J. High Energ. Phys. 0408 (2004) 007,
arXiv:hep-lat/0306014v3, 7. September 2004.
- [32] G. MÜNSTER, T. SUDMANN:
Twisted mass lattice QCD with non-degenerate quark masses
J. High Energ. Phys. 0608 (2006) 085,
arXiv:hep-lat/0603019, 13. April 2006.
- [33] O. BÄR, G. RUPAK, N. SHORESH:
Chiral perturbation theory at $\mathcal{O}(a^2)$ for lattice QCD
Phys. Rev. D70 (2004) 034508,
arXiv:hep-lat/0306021v2, 1. Juli 2003.
- [34] T. SUDMANN:
Chirale Störungstheorie für Mesonen in der Twisted-Mass Gitter-QCD
Diplomarbeit WWU Münster, Betr. Prof. Dr. G. Münster, Dezember 2005.

- [35] B. C. HALL:
An Elementary Introduction to Groups and Representations
Grad. Texts in Math. 222 (2003),
arXiv:math-ph/0005032v1, 31. Mai 2000.
- [36] M.W. REINSCH:
A simple expression for the terms in the Baker-Campbell-Hausdorff series
J. Math. Phys. 41 (2000) 2434,
arXiv:math-ph/9905012v2, 13. Januar 2000.
- [37] G. COLANGELO, G. ISIDORI:
An introduction to CHPT
Vorlesung im Rahmen der LNF Spring School, Frascati, Italien,
arXiv:hep-ph/0101264v1, 23. Januar 2001.
- [38] K. WALTER:
*Chirale Störungstheorie für twisted-mass-Gitter-QCD
mit nichtentarteten Quarkmassen*
Masterarbeit WWU Münster, Betr. Prof. Dr. G. Münster, Februar 2011.
- [39] P. RAMOND:
Field Theory: A Modern Primer - Second Edition
Westview Press, USA, 2001.
- [40] F. LORENZ:
Funktionentheorie
Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, 1997.
- [41] R. A. HORN, C. R. JOHNSON:
Matrix Analysis
Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [42] R. DASHEN:
Chiral $SU(3) \otimes SU(3)$ as a Symmetry of the Strong Interactions
Phys. Rev. 183 (1969) 1245.
- [43] U. VOGL, W. WEISE:
The Nambu and Jona-Lasinio Model: Its Implications for Hadrons and Nuclei
Prog. Part. Nucl. Phys. 27 (1991) 195.
- [44] T. FUJIHARA, T. INAGAKI, D. KIMURA:
*Influence of QED Corrections on the Orientation
of Chiral Symmetry Breaking in the NJL model*
Prog. Theor. Phys. 117 (2007) 139,
arXiv:hep-ph/0511218v2, 20. Januar 2007.
- [45] L.F. LI, H. PAGELS:
Perturbation Theory about a Goldstone Symmetry
Phys. Lett. 26 (1971) 1204.
- [46] A.J. MACFARLANE, A. SUDBERY, P.H. WEISZ:
*On Gell-Mann's λ -Matrices, d - and f -Tensors, Octets,
and Parametrizations of $SU(3)$*
Commun. math. Phys. 11 (1968).

- [47] A.J. MACFARLANE, H. PFEIFFER:
On characteristic equations, trace identities and Casimir operators of simple Lie algebras
J. Math. Phys. 41 (2000) 3192,
arXiv:math-ph/9907024v1, 30. Juli 1999.

- [48] J.A. DE AZCÁRRAGA, A.J. MACFARLANE, A.J. MOUNTAIN,
J.C. PÉREZ BUENO:
Invariant tensors for simple groups
Nucl. Phys. B510 (1998) 657,
arXiv:math-ph/9706006v2, 16. September 1997.

- [49] W.BARDEEN, A. DUNCAN, E. EICHTEN, G. HOCKNEY, H. THACKER:
Light Quarks, Zero Modes and Exceptional Configurations
Phys. Rev. D57 (1998) 1633,
arXiv:hep-lat/9705008v1, 5. Mai 1997.

- [50] F. FARCHIONI, C. GEBERT, I. MONTVAY, E. SCHOLZ, L. SCORZATO:
Partially quenched chiral perturbation theory and numerical simulations
Phys. Lett. B561 (2003) 102,
arXiv:hep-lat/0302011v2, 7. März 2003.

Danksagung

Zum Abschluss dieser Arbeit möchte ich gerne Johann Wolfgang von Goethe aus seiner 'Italientischen Reise' zitieren:

*„So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig,
man muss sie für fertig erklären,
wenn man nach Zeit und Umständen
das Mögliche getan hat.“*

Dieser 'erklärte Abschluss' meiner Arbeit wäre ohne eine Reihe von Persönlichkeiten aus meinem Leben niemals denkbar gewesen:

Zuerst einmal würde ich gerne *Prof. Dr. Gernot Münster* für den interessanten Themenvorschlag danken. Als es vor etwas über einem Jahr zur Konkretisierung des Inhaltes dieser Arbeit kam, sind Sie überaus gewissenhaft auf den von mir gewünschten Schwerpunkt eingegangen. Darüber hinaus waren Sie mir neben der steten Unterstützung bei mathematischen Fragestellungen, auch in allgemeinen Fragen zum Studium und darüber hinaus ein hilfreicher Ansprechpartner.

Als Schnittstelle zwischen ernstem Studium und privatem Amüsement stehen oft die *Kommilitonen im Büro*. Somit möchte ich *Kevin Eckert* und *Jonathan Hendrich* für den Erfahrungs- und Wissensaustausch der letzten zwölf Monate danken, dessen Hitzigkeit uns oftmals zwang, die Bürotür zu schließen, um verstörte Blicke zu vermeiden.

Des Weiteren danke ich meiner *gesamten Familie*. Diese Seiten sind über die letzten Monate durch viele eurer Hände gewandert und dabei mit hilf- und zahlreichen Bemerkungen und Korrekturen - zumindest was die Textpassagen angeht - versehen worden. Besonders hervorzuheben ist dabei *meine Tante Christiana*. Du hast diese Arbeit mindestens $\mathcal{O}(10^2)$ mal gelesen dabei nie an Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt verloren. Schlussendlich, aber nicht minder, verdienen *meine Eltern Günter und Petra* die größte Erwähnung. Ohne euren ständigen Zuspruch und die stete Unterstützung materieller und geistiger Form wäre nicht nur diese Arbeit, sondern auch mein gesamtes Studium unmöglich gewesen.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

A handwritten signature in black ink, consisting of a large capital 'S' followed by a stylized, cursive name.

Münster, den 13. September 2014